Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - ES/L Pondichéry

Série ES/L Obli. et Spé.
16 Avril 2015
Correction

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On peut résumer les données à l'aide d'un arbre.
On note B l'évènement : « la batterie fonctionne » et D l'évènement : « le disque dur fonctionne ».

- Parmi les ordinateurs vendus, 5% ont été retournés pour un défaut de batterie soit $P\left(\overline{B}\right) = 5\%$;
- Parmi ceux-ci, 2% ont aussi un disque dur défectueux soit $P_{\overline{B}}\left(\overline{D}\right) = 2\%$;
- Parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, 5% ont un disque dur défectueux soit $P_B\left(\overline{D}\right) = 5\%$.

- $P(B) = 95\%$ → B
  - $P_B(D) = 95\%$ → D
  - $P_B\left(\overline{D}\right) = 5\%$ → $\overline{D}$
- $P\left(\overline{B}\right) = 5\%$ → $\overline{B}$
  - $P_{\overline{B}}(D) = 98\%$ → D
  - $P_{\overline{B}}\left(\overline{D}\right) = 2\%$ → $\overline{D}$

Proposition 1 (Fausse)

La probabilité que l'ordinateur n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à $0,08$ à $0,01$ près.

La probabilité cherchée est $P\left(B \cap D\right)$ soit :

$$P\left(B \cap D\right) = P_B(D) \times P(B)$$
$$P\left(B \cap D\right) = 0,95 \times 0,95$$
$$P\left(B \cap D\right) = 0{,}902\,5$$

Soit arrondi au centième :

$$\boxed{P\left(B \cap D\right) \approx 0,90}$$

La proposition 1 est fausse.

Proposition 2 (Vraie)

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à $0{,}048\,5$.

La probabilité cherchée est $P\left(\overline{D}\right)$ or d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{D}\right) &= P\left(B\cap\overline{D}\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{D}\right)\\ P\left(\overline{D}\right) &= P_B(\overline{D})\times P(B)+P_{\overline{B}}(\overline{D})\times P(\overline{B})\\ P\left(\overline{D}\right) &= 0,05\times 0,95+0,02\times 0,05 \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{P\left(\overline{D}\right)=0{,}048\,5}$$

La proposition 2 est vraie.

Proposition 3 (Fausse)

Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à $0,02$.

La probabilité cherchée est $P_{\overline{D}}\left(\overline{B}\right)$ or

$$\begin{aligned} P_{\overline{D}}\left(\overline{B}\right) &= \frac{P\left(\overline{D}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}\\ P_{\overline{D}}\left(\overline{B}\right) &= \frac{P_{\overline{B}}\left(\overline{D}\right)\times P\left(\overline{B}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}\\ P_{\overline{D}}\left(\overline{B}\right) &= \frac{0,02\times 0,05}{0{,}048\,5} \end{aligned}$$

Soit arrondi au dix-millième

$$\boxed{P_{\overline{D}}\left(\overline{B}\right)\approx 0{,}020\,6>0,02}$$

la probabilité est supérieure à $0,02$, La proposition 3 est fausse.

©ISSN 2272-5318

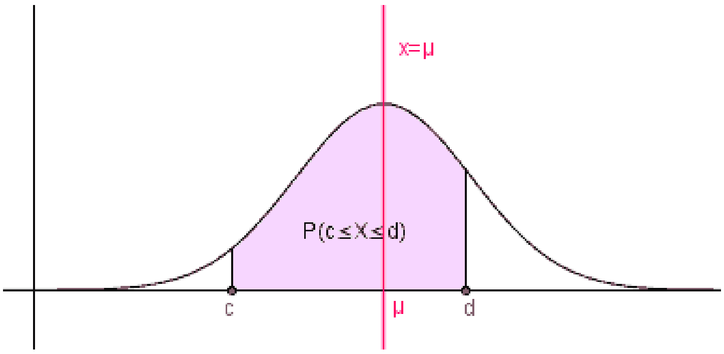
Partie B

L'autonomie de la batterie qui équipe les ordinateurs portables distribués par la société MICRO, exprimée en heure, suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Proposition 4 (Vraie)

La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à $0,2$.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée d'autonomie de la batterie, exprimée en heure décimale.
La $v.a.$ notée X suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$ et on cherche $P(X \geq 10)$.



D'après les propriétés du cours, puisque X suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$ on a :

$$P(X \leq 8) = 0,5 = P(X \geq 8)$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\
P(X \geq 10) &= 1 - \Big(P(X \leq 8) + P(8 < X < 10)\Big) \\
P(X \geq 10) &= 1 - \Big(0,5 + P(8 < X < 10)\Big) \\
P(X \geq 10) &= 0,5 - P(8 < X < 10)
\end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{P(X \geq 10) \approx 0{,}159 < 0,2}$$

La proposition 4 est vraie.

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$0.5 - \text{TIStat.normFDR}(8, 10, 8, 2) \approx 0{,}158\,655\,260\,088$$

 ©ISSN 2272-5318

Partie C

Sur 1 000 clés prélevées dans le stock, 50 clés se révèlent défectueuses.

Proposition 5 (Fausse)

Ce test, réalisé sur ces 1000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

- **1. Analyse des données** :
  - « *Dans un échantillon de taille* $n = 1\,000$*, 50 clés se révèlent défectueuses..* ». Donc la fréquence observée de clés correctes est
$$f = \frac{1\,000 - 50}{1\,000} = 0{,}95 = \mathbf{95\%}$$
  - L'entreprise MICRO vend également des clés USB et communique sur ce produit en affirmant que $p = 98\%$ des clés commercialisées fonctionnent correctement.
- **2. Intervalle de fluctuation** : On va regarder si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation.

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\left\{\begin{array}{ll} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{array}\right.$
Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est, si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a $n = 1\,000$, $p = 98\%$ alors on sait que puisque :

$$\left\{\begin{array}{ll} \checkmark & n = 1\,000 \geq 30 \\ \checkmark & np = 1\,000 \times 98\% = 980 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 1\,000 \times 2\% = 20 \geq 5 \end{array}\right.$$

Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour la fréquence $F_{1\,000}$ est :

$$I_{1\,000} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,98 - 1,96\,\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{1\,000}} \;;\; 0,98 + 1,96\,\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{1\,000}} \right]$$

Les bornes de l'intervalle sont :

$$\left\{\begin{array}{lll} p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} & \approx 0{,}971\,32 & : \text{ on donne la valeur approchée par défaut} \\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} & \approx 0{,}988\,677 & : \text{ on donne la valeur approchée par excès} \end{array}\right.$$

soit

$$\boxed{I_{1\,000} \approx [97,1\% \;;\; 98,9\%]}$$

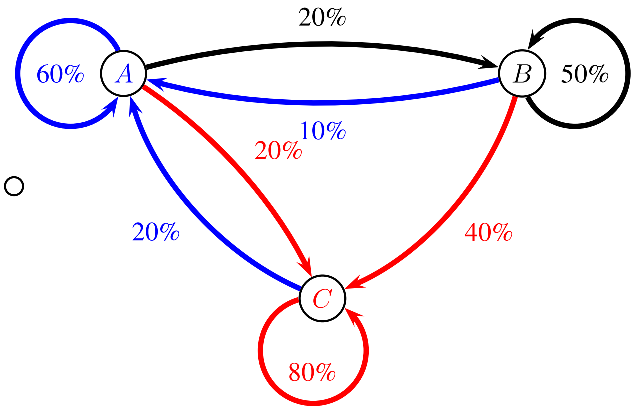
- **3. Conclusion** : La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation $\boxed{f = 95\% \notin I_{1\,000}}$, donc **l'affirmation 5 est fausse , on ne valide pas la déclaration de l'entreprise** .

Exercice 2. Spécialité : matrices et graphes probabilistes 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

- Étant sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Étant sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Étant sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.



2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de A vers A, de A vers B, de A vers C ;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de B vers A, de B vers B, de B vers C ;
- 3ème ligne : probabilité d'aller de C vers A, de C vers B, de C vers C.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

3. On donne M^2 et M^{20}. Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.
La distribution des internautes sur les trois sites après t minutes est donnée par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = (100 \;\; 0 \;\; 0)$.
On a donc :

$$N_2 = N_0 \times M^2$$
$$N_2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.42 & 0.22 & 0.36 \\ 0.19 & 0.27 & 0.54 \\ 0.28 & 0.04 & 0.68 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{N_2 = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36 \end{pmatrix}}$$

Cela signifie donc qu'au bout de 2 minutes :

<u>42% des internautes sont sur le site A, 22% sur le site B et 36% sur le site C.</u>

4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.

On a :

$$N_0 \times M^{20} \approx \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.3125 & 0.125 & 0.5625 \\ 0.3125 & 0.125 & 0.5625 \\ 0.3125 & 0.125 & 0.5625 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{N_0 \times M^{20} \approx \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix}}$$

L'état stable S semble être

$$S \approx \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix}$$

Cela signifie, qu'au bout d'un certain temps :

$\boxed{\text{31,25\% des internautes seront sur le site A, 12,5\% sur le site B et 56,25\% sur le site C.}}$

5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera. Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation. À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.

5. a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?

Pour connaître les probabilités que l'internaute se trouve respectivement en A à l'instant $t = 1$, il suffit de déterminer l'état probabiliste après le premier état.

En désignant par P_0 l'état probabiliste initial et par P_1 l'état probabiliste à l'instant $t = 1$, on a :

$$P_1 = P_0 \times M$$

Or, sachant que l'internaute trouve en C au départ de manière certaine, l'état probabiliste initial P_0 est égal à :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$P_1 = P_0 \times M$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

A l'instant 1 on a donc :

- 20% de chance que l'internaute soit en A ;
- 0% de chance que l'internaute soit en B ;
- et 80% de chance que l'internaute soit en C.

$\boxed{\text{La probabilité qu'à l'instant } t = 1 \text{ le site A soit infecté est donc de } 20\% \text{ .}}$

©ISSN 2272-5318

5. b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

De la même façon, pour connaître les probabilités que l'internaute se trouve respectivement en A, B ou C après deux étapes (au temps 2), on détermine l'état probabiliste P_2 :

$$P_2 = P_1 \times M$$
$$P_2 = P_0 \times M^2$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.42 & 0.22 & 0.36 \\ 0.19 & 0.27 & 0.54 \\ 0.28 & 0.04 & 0.68 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.04 & 0.68 \end{pmatrix}}$$

A l'instant 2 on a donc :

- 28% de chance que l'internaute soit en A ;
- 4% de chance que l'internaute soit en B ;
- et 68% de chance que l'internaute soit en C.

$$\boxed{C \xrightarrow{t=1} A \xrightarrow{t=2} B}$$

Pour que les trois sites soient infectés à l'instant $t = 2$, il faut que l'internaute qui transmet le virus, passe du site C au temps $t = 0$, au site A au temps $t = 1$ (il ne peut aller que sur A partant de C), puis du site A, il clique sur le lien du site B au temps $t = 2$.

$$\boxed{\text{La probabilité que les trois sites soient infecté à l'instant 2 est donc de } 4\%.}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Obligatoire : Suites.

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L.
Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8% des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables
n est entier
C est à valeurs réelles
Traitement
Affecter à C la valeur 300
Affecter à n la valeur 0
Tant que $C < 400$ faire
    C prend la valeur $C - C \times 0,08 + 50$
    n prend la valeur $n + 1$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher n

1. a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test C < 400	$\times\ \times\ \times$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411
Valeur de n	0	1	2	3	4	5

1. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.
La valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme est

$$\boxed{n = 5}$$

Cela correspond au nombre d'années nécessaires pour que l'apiculteur possède plus de 400 colonies d'abeilles, soit 5 années.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n), le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

2. a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.
Soit n entier naturel.
L'année $2014 + (n + 1)$, l'agriculteur s'attend à perdre 8% des colonies, donc il lui en reste 92% de l'année précédente soit $0,92 \times C_n$.
De plus il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps soit :

$$\boxed{(C_n) : \begin{cases} C_0 & = 300 \\ C_{n+1} & = 0,92\, C_n + 50 \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_{n+1} &= 625 - C_{n+1} \\
V_{n+1} &= 625 - 0,92\,C_n - 50 \\
V_{n+1} &= -0,92\,C_n + 575 \\
V_{n+1} &= 0,92\,\left(-C_n + \frac{575}{0,92}\right) \\
V_{n+1} &= 0,92\,\left(-C_n + 625\right) \\
V_{n+1} &= 0,92\,V_n
\end{aligned}$$

La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,92$, et de premier terme V_0 avec :

$$\begin{aligned}
V_0 &= 625 - C_0 \\
V_0 &= 625 - 300 = 325
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(V_n) : \begin{cases} V_0 & = 325 \\ V_{n+1} & = 0,92 \times V_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.
La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,92$, et de premier terme $V_0 = 325$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_n = V_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_n = 325 \times (0,92)^n}$$

De l'égalité $V_n = 625 - C_n$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $C_n = 625 - V_n$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ C_n = 625 - 325 \times (0,92)^n}$$

2. d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?
Le nombre de colonies en 2024 est donné par C_{10} soit

$$\boxed{C_{10} \approx 483,82}$$

Le nombre de colonies étant un entier naturel, on arrondi comme dans la question **1.a.** à l'entier le plus proche.
On peut donc estimer qu'il y aura 484 colonies en 2024.

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

3. a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?
Il suffit pour cela de remplacer le test

$$\boxed{\text{Tant que } C < 400 \text{ faire}}$$

par le test

$$\boxed{\text{Tant que } C < 600 \text{ faire}}$$

3. b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

Cette question est assez libre dans sa résolution, on peut imaginer faire un tableau de valeurs comme dans la question 1, et lire les résultats mais c'est assez long. Plus rigoureusement, il faut résoudre une inéquation.

- **Méthode 1 : tableau de valeurs**
  On arrondi comme dans la question **1.a.** à l'entier le plus proche.

Test C < 600	× × ×	Vrai	Vrai	Vrai	...	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	350	372	...	598	600
Valeur de n	0	1	2	3	...	30	31

- **Méthode 2 : résolution d'une inéquation**
  On cherche le premier entier n qui vérifie l'inégalité $C_n \geq 600$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; C_n \geq 600 \Leftrightarrow 625 - 325 \times 0,92^n \geq 600$$
$$C_n \geq 600 \Leftrightarrow -325 \times 0,92^n \geq -25$$
$$C_n \geq 600 \Leftrightarrow 0,92^n \leq \frac{25}{325} = \frac{1}{13}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc l'ordre ne change pas :

$$C_n \geq 600 \Leftrightarrow \ln\left(0,92^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{13}\right)$$

Or pour a et n strictement positif on a : $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$$C_n \geq 600 \Leftrightarrow n \ln(0,92) \leq -\ln 13$$

On va diviser les deux membres par $\ln 0,92$ qui est négatif, l'ordre change :

$$C_n \geq 600 \Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 13}{\ln 0,92}$$

$$\boxed{C_n \geq 600 \Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 13}{\ln 0,92} \approx 30,76}$$

Il faudra attendre 31 années soit 2045, pour doubler le nombre de colonies.

Exercice 3. Fonctions — 4 points

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A

1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

$$\boxed{f(-1) = -2\,\mathrm{e}^{1} \approx -5,44}$$

2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f(x) = u(x)v(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = -2(x+2) & ; \quad u'(x) = -2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; \quad v'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= -2e^{-x} - 2(x+2) \times \left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right) \\ f'(x) &= -2e^{-x} + 2(x+2) \times \mathrm{e}^{-x} \\ f'(x) &= e^{-x}\Big(-2 + 2x + 4\Big) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f'(x) = 2(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}}$$

3. En déduire les variations de la fonction f.

On vient de montrer que f' s'exprime comme un produit de deux facteurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,;\; f'(x) = 2(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Le signe de f' dépend donc uniquement de celui du facteur $2(x+1)$ et donc de $(x+1)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,;\; \begin{cases} f'(x) = 0 & \iff x = -1 \\ f'(x) > 0 & \iff x > -1 \\ f'(x) < 0 & \iff x < -1 \end{cases}}$$

On en déduit les variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$f(-1) = -2\,\mathrm{e}^{1} \approx -5.44$	↗	

©ISSN 2272-5318

Partie B

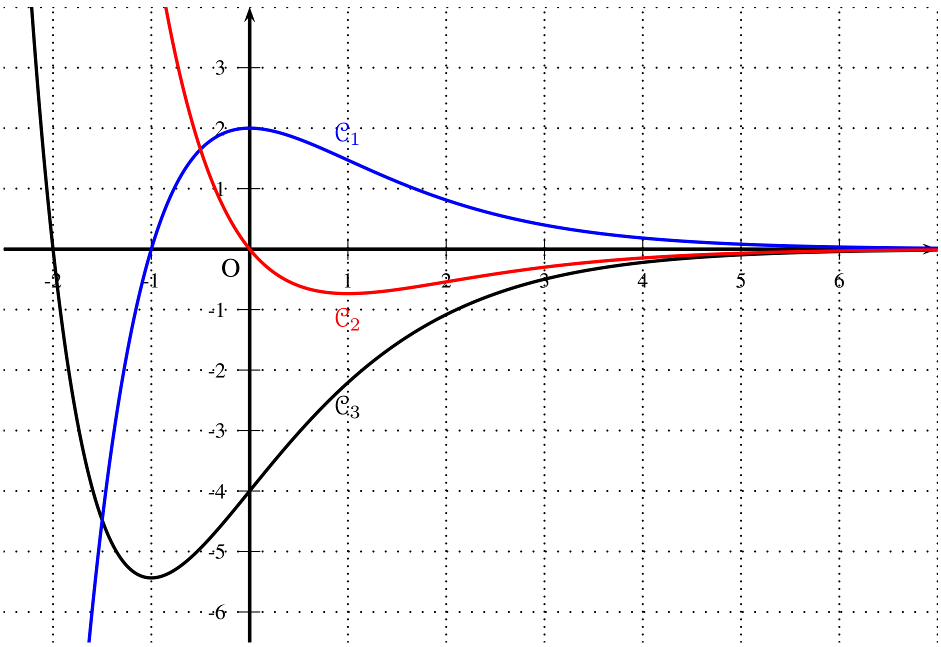
Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.
Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus du graphe. De plus on a la propriété suivante :

> **Proposition 6** (Fonction convexe)
>
> Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
> **f est convexe** si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles**.

- La courbe C_3 représente la fonction f car c'est la seule parmi les trois qui corresponde au tableau de variation obtenu à la question précédente .
- La courbe C_1 est la courbe représentative de la dérivée de f. En effet c'est la courbe représentative d'une fonction négative sur $]-\infty\ ;\ -1]$ et positive sur $[-1\ ;\ +\infty[$, et c'est la seule possible parmi les deux autres choix.
- La courbe C_2 est donc celle de la dérivée seconde de f.

On applique alors la propriété 6 puisque la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Par lecture graphique on peut dire que la dérivée seconde de f est positive sur $]-\infty\ ;\ 0]$, la fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe sur }]-\infty\ ;\ 0].}$$



Rappel : On a montré que

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(-1) = -2\,\mathrm{e}^{1} \approx -5.44$	$\nearrow$	

Exercice 4. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats
La capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces.

Partie A

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?
On lit sur le graphique l'image de 21 (milliers) par la fonction coût, soit 250 (milliers d'euros).
Les coûts de fabrication de 21 000 pièces s'élèvent à 250 000 euros.

2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
L'entreprise réalise un bénéfice si les recettes sont supérieures aux coûts. Il suffit donc de regarder les abscisses des points de la courbe R qui sont au dessus de ceux de la courbe C.
L'entreprise réalise un bénéfice si elle produit entre 3 000 et 22 500 pièces.

3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?
Le bénéfice semble maximal pour 14 000 pièces.

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ par $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x$.

1. Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$.
La fonction B est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ comme somme de fonction qui le sont.

$$\begin{aligned}\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ B'(x) &= \left(-0,5x^2 + 6x - 20\right)' + (2x\ln x)' \\ B'(x) &= -x + 6 + (2x\ln x)'\end{aligned}$$

Or par dérivation du produit : $(uv)' = u'v + uv'$; u et v dérivables sur $[1\ ;\ 30]$

$$\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ B'(x) = -x + 6 + (2x)'\ln x + 2x\,(\ln x)'$$

Et par dérivation de la fonction logarithme sur $[1\ ;\ 30]$: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

$$\begin{aligned}\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ B'(x) &= -x + 6 + 2\ln x + 2x \times \frac{1}{x} \\ B'(x) &= -x + 6 + 2\ln x + 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ B'(x) = -x + 8 + 2\ln x}$$

2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$. Justifier le tableau de variation ci-contre de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$.
Le tableau de variation donné est celui de B', il donne aussi le signe de B''.

x	1		2		30
$B''(x)$		$+$	0	$-$	
$B'(x)$	$B'(1) = 7$	$\nearrow$	$B'(2) = 6 + 2\ln 2$	$\searrow$	$B'(30) = -22 + 2\ln 30$

©ISSN 2272-5318

On admet que la fonction B' est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ avec

$$\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ B''(x) = -1 + \frac{2}{x}$$

Or

$$\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ B''(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}$$

La dérivée seconde B'' s'exprime donc comme un quotient dont le dénominateur, x, est strictement positif sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$. Son signe ne dépend donc que de celui du numérateur $(-x+2)$ dont l'étude est aisée.

$$\boxed{\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ \begin{cases} B''(x) = 0 & \Longleftrightarrow x = 2 \\ B''(x) > 0 & \Longleftrightarrow 1 \leq x < 2 \\ B''(x) < 0 & \Longleftrightarrow 2 < x \leq 30 \end{cases}}$$

Le calcul des images 1, 2 et 30 par B' achève donc la construction du tableau de variation proposé.

$$\forall x \in [1\ ;\ 30]\ ;\ B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$$

Soit :

$$\left| \begin{array}{l} B'(1) = -1 + 8 + 2\ln 1 = 7\ ; \\ B'(2) = -2 + 8 + 2\ln 2 = 6 + 2\ln 2\ ; \\ B'(30) = -30 + 8 + 2\ln 30 = -22 + 2\ln 30. \end{array} \right.$$

3.

3. a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 30].

3. b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

- **Sur l'intervalle [1 ; 2].**
  Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ la fonction B' est strictement positive puisque son minimum est 7, atteint pour $x = 1$, en conséquence l'équation $B'(x) = 0$ n'admet pas de solution cet intervalle.
- **Sur l'intervalle [2 ; 30].**

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

- La fonction B' est **continue** (car dérivable) et **strictement décroissante** sur l'intervalle $[2\ ;\ 30]$;
- L'image par B' de l'intervalle $[2\ ;\ 30]$ est $[-22 + 2\ln 30\ ;\ 6 + 2\ln 2]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image $[-22 + 2\ln 30\ ;\ 6 + 2\ln 2]$ car

$$-22 + 2\ln 30 \approx -15,2 < 0 < 6 + 2\ln 2 \approx 7,4$$

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $B' = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[2\ ;\ 30]$.

- **Conclusion** :

$$\boxed{\text{L'équation } B'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle } [1\,;\,30]}$$

3. c. Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
Avec un pas de $\Delta = 0,001$ on obtient : $\begin{cases} B'(13,153) & \approx & 0,0003 > 0 \\ B'(13,154) & \approx & -0,0005 < 0 \end{cases}$, donc $13,153 < \alpha < 13,154$.
Une valeur approchée au millième de la valeur de α est (par exemple) :

$$\boxed{\alpha \approx 13,153}$$

4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 30], et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.

On a :

x	1		2		α		30
$B''(x)$		$+$	0	$-$			
$B'(x)$	7	↗	$B'(2)=6+2\ln 2$	↘	0	↘	$-22+2\ln 30$

De ce fait, $B'(x)$ est positif sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha[$, négatif sur l'intervalle $]\alpha\ ;\ 30]$ et nul en α.
On peut dresser le tableau de variations de B.

x	1		α		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	$B(1)=-\dfrac{29}{2}$	↗	$B(\alpha)$	↘	$B(30)=6\ln 30-290$

5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?

En utilisant le tableau de variation ci-dessus, on voit que le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ est atteint pour $x=\alpha$.
En utilisant l'approximation de α obtenue à la question 3.c. on obtient :

$$\boxed{B(\alpha)\approx B(13,153)\approx 40,199}$$

Le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal est donc de **13 153 pièces**.
Ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) est alors d'environ **40 000 euros**.