Correction Baccalauréat S - Obligatoire
Antilles-Guyane - 18 Juin 2013

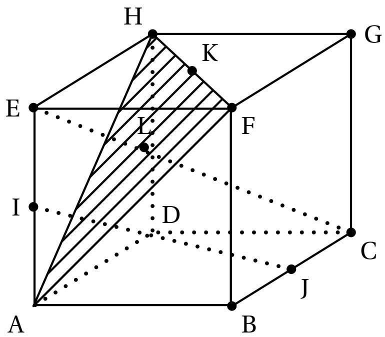
www.mathexams.fr / www.math93.com

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **5 points**

Commun à tous les candidats

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(\mathbf{A}\,;\,\overrightarrow{\mathbf{AB}},\overrightarrow{\mathbf{AD}},\overrightarrow{\mathbf{AE}}\right)$:
ABCDEFGH désigne un cube de côté 1. On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment [AE].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [HF].
Le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM).

1. $\boxed{\textbf{Réponse b}}$: **Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires**.

   Les plans (AEC) et (IEC) sont confondus puisque I appartient à [EA]. Or le point J n'appartient pas à (AEC). Donc **les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires**.

2. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$: **Le produit scalaire** $\overrightarrow{\mathbf{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BG}}$ **est égal à 1**.

   $$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}\right)$$
   $$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}}+\underbrace{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CG}$$
   $$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=\quad 0\quad+\quad 0\quad+\quad 0\quad+\quad BF^2$$

   et donc $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=1$ puisque BF = 1.

3. $\boxed{\textbf{Réponse d}}$: **Le plan** $\mathscr{P}=(AFH)$ **a pour équation cartésienne :** $x+y-z=0$.

   Les points A, F et H ont pour coordonnées donc le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$: A(0 ; 0 ; 0), F(1 ; 0 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).
   Il suffit alors de tester les coordonnées dans les équations proposée. On a :

   – **Pour A(0 ; 0 ; 0)** : $x+y-z=0+0-0=0$, et la réponse a. est éliminée ;
   – **Pour F(1 ; 0 ; 1)** : $x+y-z=1+0-1=0$; et la réponse b. est éliminée ;
   – **Pour H(0 ; 1 ; 1)** : $x+y-z=0+1-1=0$, et la réponse c. est éliminée.

4. $\boxed{\textbf{Réponse b}}$: $\overrightarrow{\mathbf{EL}}$ **est un vecteur normal au plan** $\mathscr{P}$.
   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\vec{n}(1;1;-1)$. Il faut donc que le vecteur choisit soit colinéaire à $\vec{n}$.
   Or $\overrightarrow{EC}\,(1;1;-1)$ donc $\overrightarrow{EC}\,(1;1;-1)$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

5. $\boxed{\textbf{Réponse d}}$: $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

   Déterminons les coordonnées de L, intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.

Une équation paramétrique de (EC) est : $\begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1-t \end{cases}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Injectons ces équations dans l'équation de $\mathscr{P}$:

$t+t-1+t=0$ soit $t=\dfrac{1}{3}$

Donc, $\begin{cases} x_L &= \frac{1}{3} \\ y_L &= \frac{1}{3} \\ z_L &= \frac{2}{3} \end{cases}$

Ce qui signifie que, dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$: $\text{A}\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$ soit $\overrightarrow{\text{AL}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{AE}}$.

Exercice 2. — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Pour assez grand, avec une probabilité au moins égale à 0,95 on a $f \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit :

$$\begin{aligned} p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} &\iff -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq f - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff -f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq -f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \end{aligned}$$

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF.
Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'évènement « l'étudiant répond A »,

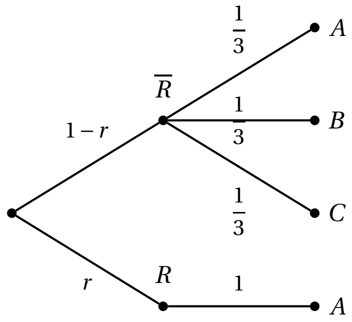
B l'évènement « l'étudiant répond B »,

C l'évènement « l'étudiant répond C »,

R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,

$\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.



b. **Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$.**
Les évènement R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. Avec la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(A) = P(A \cap R) + P\left(A \cap \overline{R}\right)$$
$$P(A) = P_{\overline{R}}(A) \times P\left(\overline{R}\right) \quad + \quad R(A) \times P(R)$$
$$P(A) = \quad \frac{1}{3} \times (1-r) \quad + \quad 1 \times r$$
$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r$$

Donc $\boxed{P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)}$.

c. **Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse**.

On cherche $P_A(R) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(A)} = \dfrac{r}{P(A)} = \dfrac{r}{\frac{1}{3}(1+2r)}$, donc $\boxed{P_A(R) = \dfrac{3r}{1+2r}}$

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. **Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.**
On répète de façon indépendante (tirage avec remise) 400 fois une même expérience de Bernoulli, dont la probabilité du succès (une bonne réponse) est $P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de bonnes réponses suit une **loi binomiale** de paramètres : $\boxed{n = 400 \text{ et } p = P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)}$.

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p..
Un intervalle de confiance pour p au seuil de 95% est : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
Avec $n = 400$ et $f = \frac{240}{400} = 0,6$ on obtient $\left[0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}} \ ; \ 0,6 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right]$ soit $\boxed{[0,55 \ ; \ 0,65]}$.

En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r. Alors :

$$\begin{aligned}
0,55 \leq p \leq 0,6 \quad &\iff \quad 0,55 \leq \frac{1}{3}(1+2r) \leq 0,6 \\
&\iff \quad 3 \times 0,55 \leq 1 + 2r \leq 3 \times 0,6 \\
&\iff \quad 1,65 - 1 \leq 2r \leq 1,95 - 1 \\
&\iff \quad \frac{0,65}{2} \leq r \leq \frac{0,95}{2} \\
&\iff \quad 0,325 \leq r \leq 0,475
\end{aligned}$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r est $\boxed{[0,325 \ ; \ 0,475]}$.

c. Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i. **Donner les paramètres de cette loi normale**.
La variable aléatoire X considérée suit donc une loi binomiale de paramètres
$n = 400$ et $p = \dfrac{1}{3}(1+2\times 0,4)$.
– Son espérance est : $E(X) = np = 400 \times 0,6 = 240$;
– son écart-type est : $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \times 0,6 \times 0,4} = \sqrt{96} \approx 9,8$.

Donc on peut considérer que X suit une **loi normale** de paramètres $\boxed{m = 240 \text{ et } \sigma \approx 9,8}$.

ii. **Donner une valeur approchée de** $P(X \leqslant 250)$ **à** 10^{-2} **près.**

Par simple lecture dans le tableau donné on a :

$\boxed{P(X \leqslant 250) = 0,85}$ à 10^{-2} près.

Exercice 3. **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. **Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**

   – **Limite en $+\infty$.**
   On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{cases}$, de ce fait $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

   – **Limite en $-\infty$.**
   On a $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$ et donc :
   $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0 & : \text{ Par le théorème des croissances comparées} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$, de ce fait
   $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.
   La fonction f est de la forme uv avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction f est donc dérivable comme produit de fonctions qui le sont et puisque $u'(x) = 1$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$ on a :
   $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$
   On a montré que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x}$$

3. **Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.**
   Puisque pour tout réel x on a $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(x+2)$ et donc on peut facilement dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-2) = -\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 = m\mathrm{e}^x \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

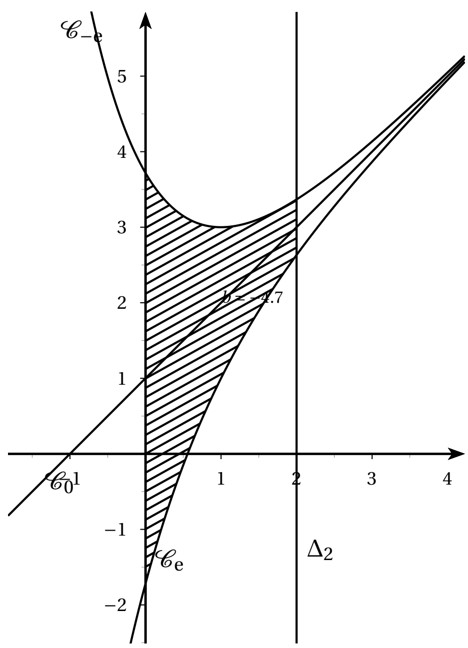
   b. D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :

– si $m < -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
– si $m = -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
– si $-\frac{1}{e^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
– si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

2. – La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{e^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -e$.
– La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\frac{1}{e^2}$ ou $m \geqslant 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
– Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = e$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -me^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
– si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
– si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
– si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

4. Le domaine D_2 hachuré :



a.

b. Pour tout $a \geqslant 0$, la courbe $\mathscr{C}_{-e}$ est au dessus de $\mathscr{C}_e$, par conséquent l'aire $\mathscr{A}(a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(a) &= \int_0^a f_{-e}(x) - f_e(x)\,dx \\
&= \int_0^a \left((x+1) + ee^{-x}\right) - \left((x+1) - ee^{-x}\right)dx \\
&= \int_0^a 2ee^{-x}\,dx \\
&= 2e\left[-e^{-x}\right]_0^a \\
&= 2e\left(-e^{-a} + 1\right) \\
&= 2e - 2e^{1-a}.
\end{aligned}$$

On a de plus $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{1-a} = 0$, par conséquent : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 2e$.

Exercice 4. **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

2. $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1 + i + \sqrt{2}}{3} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}i$. On a alors $a_1 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. **a.** Pour $N = 2$, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

K	A	B
1	0,8047	0,3333
2	0,5586	0,1111

b. Plus généralement, pour une valeur de N saisie par l'utilisateur, l'algorithme affichera la valeur de a_N.

Partie B

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$ et $z_{n+1} = \dfrac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$, donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{3}.$$

2. La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que (b_n) converge vers 0.

3. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{z_n + |z_n|}{3}\right| = \frac{1}{3}|z_n + |z_n|| \leqslant \frac{1}{3}(|z_n| + |z_n|)$, c'est-à-dire : $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

- On a $u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- Supposons que, pour un certain entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$, alors :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2},$$

  la propriété est donc héréditaire.
- En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n| \geqslant 0$, donc : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. Comme $\lim\limits_{n \to +?} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$, le théorème « des gendarmes » permet de conclure que la suite (u_n) converge vers 0.

c. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = |z_n| = \sqrt{a^n + b^n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

Ainsi, pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |a_n| \leqslant u_n$. Comme (u_n) converge vers 0, le théorème « des gendarmes » permet à nouveau de conclure que $(|a_n|)$ converge vers 0, donc que (a_n) converge vers 0.