Correction du Baccalauréat S
Liban - 28 Mai 2013

`www.mathexams.fr`

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
Les points A, B, Cet D ont pour coordonnées respectives A(1 ; −1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(−3 ; 5 ; 4) et D(1 ; 2 ; 3).

On a les équations des droites $\mathscr{D} : \begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 2t-1 \\ z &= 3t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}' \begin{cases} x = k+1 \\ y = k+3 \\ z = -k+4 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

Question 1 : Proposition d. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.
Des vecteurs directeurs des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont respectivement $\overrightarrow{v_{\mathscr{D}}}$ (1 ; 2 ; 3) et $\overrightarrow{v_{\mathscr{D}'}}$ (1 ; 1 ; −1)
Le produit scalaire $\overrightarrow{v_{\mathscr{D}}}.\overrightarrow{v_{\mathscr{D}'}} = 0$ donc les vecteurs directeurs des droites sont orthogonaux.

Question 2 : Proposition c. Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.

- En remplaçant les coordonnées d'un point de la droite $\mathscr{D}$ dans l'équation du plan $\mathscr{P}$ on vérifie bien que le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$. Pour tous les réels t on a : $(t+1)+(2t-1)-(3t-2)+2=0$.
  En remplaçant les coordonnées d'un point de la droite $\mathscr{D}'$ dans l'équation du plan $\mathscr{P}$ on vérifie bien que le plan $\mathscr{P}$ ne contient pas la droite $\mathscr{D}'$. Pour tous les réels t on a : $(k+1)+(k+3)-(-k+4)+2=3k+2$.
  Cela élimine les propositions b et d.

- Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n_{\mathscr{P}}}$ (1 ; 1 ; −1) qui est colinéaire (même égal) à $\overrightarrow{v_{\mathscr{D}'}}$ (1 ; 1 ; −1), donc le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.

Question 3 : Proposition c. Le triangle ABC est équilatéral.

$\overrightarrow{AB}$ (2 ; 4 ; 6) , $\overrightarrow{BC}$ (−6 ; 2 ; −4), $\overrightarrow{AC}$ (−4 ; 6 ; 2) ,$\overrightarrow{AD}$ (0 ; 3 ; 1).

- Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ (−4 ; 6 ; 2) et $\overrightarrow{AD}$ (0 ; 3 ; 1) ne sont pas colinéaires, donc cela élimine la proposition a.
- $AB = 2\sqrt{14} = BC = AC$, donc le triangle ABC est équilatéral.

Question 4 : Proposition b. $\overrightarrow{n}$ (3 ; −1 ; 2)
- $\overrightarrow{n}$ (1 ; 1 ; −1) n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{v_{\mathscr{D}'}}$ (1 ; 1 ; −1) ce qui élimine la proposition d.
- Les 3 autres vecteurs sont bien orthogonaux à $\overrightarrow{v_{\mathscr{D}'}}$ (1 ; 1 ; −1).
- L'équation de $\mathscr{P}'$, le plan contenant le point A(1 ; −1 ; 2) et de vecteur vecteur normal $\overrightarrow{n}$ (3 ; −1 ; 2) est :
  $(x-1)\times 3+(y+1)\times(-1)+(z-2)\times 2=0$ soit $3x-y+2z-8=0$
  En remplaçant les coordonnées d'un point de la droite $\mathscr{D}'$ dans l'équation du plan $\mathscr{P}'$ on vérifie bien que le plan $\mathscr{P}'$ contient la droite $\mathscr{D}'$.
  Pour tous les réels k on a : $3(k+1)-(k+3)+2(-k+4)-8=0$.

Exercice 2. **5 points**

Commun à tous les candidats

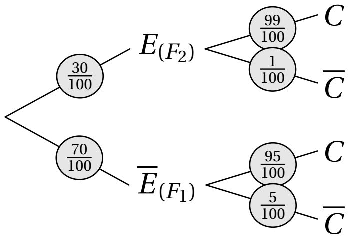
L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. **Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.**



2. **Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »**

   On cherche à calculer $P\left(C\cap\overline{E}\right) = P_{\overline{E}}(C)\times P\left(\overline{E}\right) = \dfrac{95}{100}\times\dfrac{70}{100}$ donc $\boxed{P\left(C\cap\overline{E}\right) = \dfrac{66,5}{100}}$.

3. **Déterminer la probabilité de l'évènement C.**

   On a $P(C) = P(C\cap E) + P\left(C\cap\overline{E}\right) = \dfrac{99}{100}\times\dfrac{30}{100} + \dfrac{66,5}{100}$ soit $\boxed{P(C) = \dfrac{96,2}{100}}$.

4. **Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.**

$$P_C(E) = \frac{P(E\cap C)}{P(C)} = \frac{P_E(C)\times P(E)}{P(C)} = \frac{\dfrac{99}{100}\times\dfrac{30}{100}}{\dfrac{96,2}{100}} \text{ et donc } \boxed{P_C(E)\approx 30,9\%}.$$

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.
   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	**0,18**	**0,904 4**
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.
   En utilisant le tableau on a : $\boxed{P(0,16\leqslant X\leqslant 0,18) = 0,9044}$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

D'après le cours, on sait que Z suit **une loi normale centrée réduite** $N(0;1)$.

b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

Si $0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18$ on a : $\dfrac{0,16 - m_2}{\sigma_2} \leqslant \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2} \leqslant \dfrac{0,18 - m_2}{\sigma_2}$ et donc $\boxed{\dfrac{-0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma_2}}$

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	**0,990**
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

D'après les données on sait que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$, donc $P(0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18) = 0,99$.

De ce fait d'après la question précédente : $P\left(\dfrac{-0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right) = 0,99$

Le tableau de valeurs nous donne alors $P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta) = 0,99$ pour $\beta = 2,5758$.

On en déduite que $\boxed{\sigma_2 = \dfrac{0,01}{2,5758} \approx 0,004 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

Exercice 3. **6 points**

Commun à tous les candidats

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donnée en ANNEXE.

1. **Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.**
   On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.
   Donc :
   – $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 1}$, la courbe $\mathscr{C}_1$ présente une $\boxed{\text{asymptote d'équation } y = 1 \text{ en } +\infty}$.
   – $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0}$, la courbe $\mathscr{C}_1$ présente une $\boxed{\text{asymptote d'équation } y = 0 \text{ en } -\infty}$.

2. **Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.**
   En multipliant numérateur et dénominateur par e^x, non nul quelque soit x, on a :
   $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{-x})\times \mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

3. **On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.**
   $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est de la forme $\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$. u est non nul pour tout x, de ce fait f_1 est dérivable et $f_1'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$. On obtient alors facilement $\boxed{f_1'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}}$.
   $f_1'(x)$ est donc positif pour tout x et f_1 est croissante strictement sur $\mathbb{R}$.

4. **On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique.**

   – **Calcul de I.**
   $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ est de la forme $\dfrac{v'(x)}{v(x)}$ avec $v(x) = 1+\mathrm{e}^x$. v étant strictement positif sur $\mathbb{R}$, une primitive de $f_1(x)$ est $\ln v(x)$.
   $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2$ et donc $\boxed{I = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)}$.

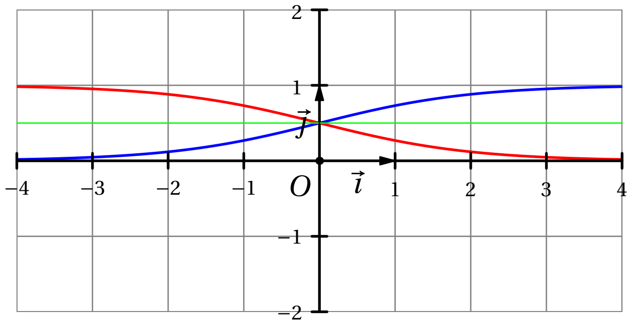
   – **Interprétation de I.**
   I représente l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. L'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit sur les vecteurs du repère

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. **Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.**
   Pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1+\mathrm{e}^x+1+\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^x)} = \dfrac{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^0} = \dfrac{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$
   Donc pour tout réel x $\boxed{f_1(x) + f_{-1}(x) = 1}$.

2. **En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.**
   Le point K est le milieu du segment $[MP]$ donc ses coordonnées sont : $K\left(\frac{x_M + x_P}{2} ; \frac{y_M + y_P}{2}\right)$
   Soit $K\left(\frac{x+x}{2} ; \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2}\right)$, or d'après la question précédente, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$ donc les coordonnées du point K sont donc $\boxed{K\left(x ; \frac{1}{2}\right)}$.
   De ce fait, le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. **Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.**
   On trace la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. D'après ce qui précède les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$ sont symétriques par rapport à cette droite ce qui permet de construire $\mathscr{C}_{-1}$.



4. **En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.**

   - De la relation $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$ on obtient facilement que $f_{-1}(x) = 1 - f_1(x)$
     et donc $f_1(x) - f_{-1}(x) = 2f_1(x) - 1$.
   - Comme $f_1(0) = \frac{1}{2}$ et que f_1 est strictement croissante, pour tout réel $x \geq 0$, $f_1(x) \geq \frac{1}{2}$ et donc $2f_1(x) - 1 \geq 0$.
     Il en résulte que sur $[0;1]$, $f_1(x) - f_{-1}(x) \geq 0$ ce qui entraîne que $\mathscr{C}_1$ est située au dessus de $\mathscr{C}_{-1}$.
   - L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est donc donnée par : $J = \int_0^1 \left(f_1(x) - f_{-1}(x)\right) \mathrm{d}x$.
   - Le calcul de $J = \int_0^1 \left(2f_1(x) - 1\right) \mathrm{d}x$ est alors facile car par linéarité de l'intégrale : $J = 2I - 1$.
     On obtient donc $\boxed{J = 2\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right) - 1}$ ce qui nous donne l'aire recherchée en unités d'aire.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.**
   Cette affirmation est VRAIE.
   $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \mathrm{e}^{-kx}\right) > 1$ et donc $f_k(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-kx}} \in [0 ; 1]$
2. **Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.**
   Cette affirmation est FAUSSE.
   $f_k'(x) = \frac{k\mathrm{e}^{-kx}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-kx}\right)^2}$ qui est clairement du signe de k.

3. **Pour tout réel** $k \geqslant 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

   Cette affirmation est VRAIE.

   On a $f_k\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{k}{2}}}$, or :

Si	k	$\geqslant$	10	
Alors	$e^{-k/2}$	$\leqslant$	$e^{-10/2}$	car la fonction $x \longmapsto e^{-x/2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Et	$1+e^{-k/2}$	$\leqslant$	$1+e^{-10/2}$	
d'où	$\dfrac{1}{1+e^{-\frac{k}{2}}}$	$\geqslant$	$\dfrac{1}{1+e^{-5}} \approx 0,9933$	car la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

   Et donc on a bien $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

Exercice 4. **5 points**

Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. $\boxed{u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 22}$ et $\boxed{u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 62}$.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	a, b et c sont des nombres réels
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	a prend la valeur 3
	b prend la valeur 8
Traitement :	Saisir n
	Pour i variant de 2 à n faire
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b **prend la valeur ...**
	Fin Pour
Sortie :	Afficher b

a. La ligne manquante est donc : $\boxed{b \text{ prend la valeur } 5 \times a - 6 \times c}$.
On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?
Il semble donc que cette suite soit **strictement croissante**.

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

– Avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AC_n = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = C_{n+1}$.
De ce fait $\boxed{C_{n+1} = AC_n.}$

– On a donc facilement par récurrence, ou par analogie avec une suite numérique géométrique, pour tout entier naturel n, $\boxed{C_n = A^n C_0.}$

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

– **Calculons** QP.
$QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$

– **On admet que** $A = PDQ$.
Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

  – **Initialisation** :
  Pour $n = 1$ on a $PD^1Q = PDQ = A$ par hypothèse.

  – **Hérédité** :
  Supposons que pour n fixé, $A^n = PD^nQ$, alors :
  $A^{n+1} = A.A^n = A.PD^nQ$ et puisque $A = PDQ$
  $A^{n+1} = PD\underbrace{Q.P}D^nQ$ or $QP = Id_2$ donc
  $A^{n+1} = PD.Id_2.D^nQ$
  $A^{n+1} = P\underbrace{DD^n}Q$
  $A^{n+1} = PD^{n+1}Q$

- **Conclusion** :
  Pour tout entier naturel non nul n, $\boxed{A^n = PD^nQ}$.

5. On admet que pour tout entier naturel non nul n,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1}-2\times 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

- D'après question 3°) on a $C_n = A^nC_0$ et donc
  $C_n = A^nC_0$ soit :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1}-2\times 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1}-2\times 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\times\left(-2^{n+1}+3^{n+1}\right)+3\times\left(3\times 2^{n+1}-2\times 3^{n+1}\right) \\ 8\times(-2^n+3^n)+3\times(3\times 2^n-2\times 3^n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}+2\times 3^{n+1} \\ 2^n+2\times 3^n \end{pmatrix}$$

- On a donc : $\boxed{u_n = 2^n + 2\times 3^n}$

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

On sait que si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{q}^n = +\infty$, donc ici

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

et donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$.