BTS Groupement A – Mathématiques

Éléments de correction

Session 2013

Exercice 1 :
Partie A :

1. Voir annexe Table 1 et Figure 1
2. (a) On a $S(0) = f(0) + f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ d'où

$$\boxed{S(0) = -1}$$

   (b) À $t = 0$, $S(0) \neq 0$ par conséquent, $\boxed{\text{le système triphasé n'est pas équilibré.}}$

Partie B :

1. a_0 correspond à la valeur moyenne de la fonction, c'est-à-dire aussi à un facteur 2π près, à l'aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses.
   Graphiquement, cette aire est nulle.

$$\boxed{a_0 = 0}$$

2. La fonction étant paire, $\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ non nul, } b_n = 0.}$
3. (a)
   - Sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$, $\quad g(t) = 1$
   - Sur $\left]\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right[$, $\quad g(t) = 0$
   - Sur $\left]\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right[$, $\quad g(t) = -1$

   (b) On a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{2\pi}\int_{0}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 0\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(-\cos(nt))\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right)
\end{aligned}$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{a_n = \frac{2}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)}$$

4. (a) Pour $n = 3k$, on a $a_{3k} = \dfrac{2}{3k\pi}\left(\sin(k\pi) + \sin(2k\pi)\right)$ d'où

$$\boxed{a_{3k} = 0}$$

   (b) Au vu de la question précédente, l'amplitude des harmoniques de rang multiple de 3 est nulle. Par conséquent $\boxed{\text{le système triphasé est équilibré.}}$

Exercice 2 :
Partie A :

1. On recherche une solution y constante, alors $y(t) = a$ d'où $y'(t) = 0 = y''(t) = 0$.
   En remplaçant dans l'équation (E), on obtient immédiatement
   $$\boxed{y(t) = 10}$$
2. L'équation caractéristique associée à (E_0) s'écrit $r^2 + r + 0,25 = 0$, c'est-à-dire $(r + 0,5)^2 = 0$. Elle admet donc une racine double $r = -0,5$.
   Les solutions de (E_0) s'écrivent alors
   $$\boxed{y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-0,5t} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}}$$
3. La solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) et une solution particulière de (E).
   $$\boxed{y(t) = 10 + (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-0,5t} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}}$$
4. La bonne réponse est
   $$\boxed{10 - (5t + 10)\mathrm{e}^{-0,5t}}$$

Partie B :

1. À l'aide de la table des transformées de Laplace,
   $$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[s''(t)\right](p) &= p^2S(p) - ps(0) - s'(0)\\ &= p^2S(p) \text{ car } s(0) = 0 \text{ et } s'(0) = 0\end{aligned}$$
   et
   $$\mathscr{L}\left[sin(2t)U(t)\right](p) = \frac{2}{p^2 + 4}$$
   d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle,
   $$\begin{aligned}p^2S(p) + 9S(p) &= 9 \times \frac{2}{p^2 + 4}\\ (p^2 + 9)S(p) &= \frac{18}{p^2 + 4}\end{aligned}$$
   c'est-à-dire
   $$\boxed{G(p) = \frac{18}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}}$$
2. On a, en réduisant au même dénominateur :
   $$\begin{aligned}\frac{a}{p^2 + 4} + \frac{b}{p^2 + 9} &= \frac{a(p^2 + 9) + b(p^2 + 4)}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}\\ &= \frac{(a + b)p^2 + 9a + 4b}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}\end{aligned}$$
   Par identification avec la relation demandée, on obtient le système
   $$\begin{cases} a + b = 0\\ 9a + 4b = 18\end{cases}$$
   d'où $a = -b = \dfrac{18}{5}$.
   $$\boxed{S(p) = \frac{18}{5}\left(\frac{1}{p^2 + 4} - \frac{1}{p^2 + 9}\right)}$$

3. On a par lecture de la table des transformées de Laplace

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+4}\right]=\frac{1}{2}\sin(2t)U(t)$$

et

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+9}\right]=\frac{1}{3}\sin(3t)U(t)$$

alors,

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{18}{5}\left(\frac{1}{2}\sin(2t)-\frac{1}{3}\sin(3t)\right)U(t) \\ &= \left(\frac{9}{5}\sin(2t)-\frac{6}{5}\sin(3t)\right)U(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{s(t)=(1,8\sin(2t)-1,2\sin(3t))\,U(t)}$$

Partie C :

1. On lit graphiquement

$$\boxed{A\approx 2,8}$$

2. On a immédiatement

$$\boxed{f'(t)=3,6\,(\cos(2t)-\cos(3t))}$$

3. (a) On utilise le formulaire

$$\begin{aligned} \cos(2t)-\cos(3t) &= -2\sin\left(\frac{2t+3t}{2}\right)\sin\left(\frac{2t-3t}{2}\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{-t}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{f'(t)=7,2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

On en déduit immédiatement

$$\boxed{f'\left(\frac{2k\pi}{5}\right)=0}$$

(b) Les points M_1,M_2, M_3 et M_4 correspondent aux extremums locaux de la fonction f, c'est-à-dire qu'en l'abscisse de ces points, la dérivée de f est nulle.

- L'abscisse de M_1 est $\dfrac{2\pi}{5}$
- L'abscisse de M_2 est $\dfrac{4\pi}{5}$
- L'abscisse de M_3 est $\dfrac{6\pi}{5}$
- L'abscisse de M_4 est $\dfrac{8\pi}{5}$

(c) C'est le point M_3 qui correspond à l'amplitude maximale, donc

$$A=f\left(\frac{6\pi}{5}\right)=1,8\sin(2,4\pi)-1,2\sin(3,6\pi)$$

c'est-à-dire

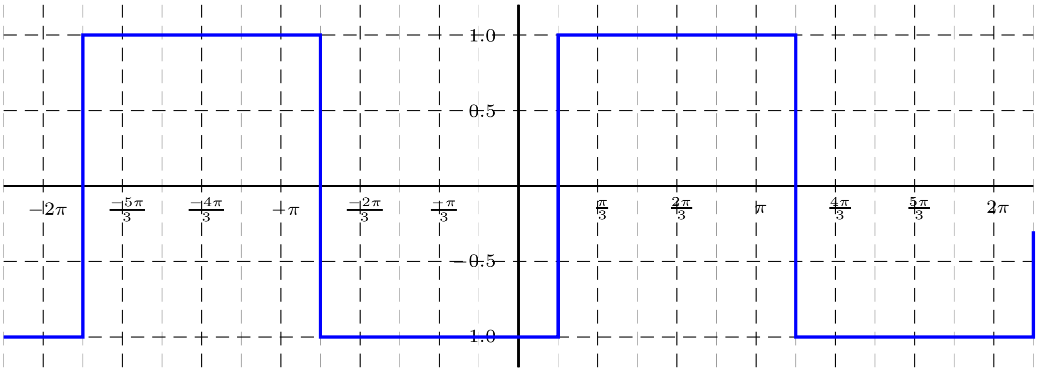
$$\boxed{A\approx 2,853}$$

Document réponse 1 de l'exercice,
spécialités CIRA, Électrotechnique, IRIS, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

TABLE 1 – Tableau des valeurs prises par $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ pour certaines valeurs de t

t	$-\dfrac{4\pi}{3}$	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{3}$	π	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{3}$
$f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

FIGURE 1 – Courbe représentative de la tension $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$



Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr