

Corrigé

1 Les équations de CAUCHY-RIEMANN

- 1) a) $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$ (car f et g le sont sur $\mathbb{R}^2$) et on a immédiatement

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

- b) De même (en omettant les variables pour plus de lisibilité),

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial g}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}$$

d'où, à l'aide des équations de CAUCHY-RIEMANN,

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} = -\cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} = r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} = r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$$

- 2) a) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, fixé. Pour tout α réel, φ_α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n \iff \forall t > 0 \quad t^2 \varphi_\alpha''(t) + t \varphi_\alpha'(t) - n^2 \varphi_\alpha(t) = 0$$

d'où

$$\boxed{\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n} \iff \forall t > 0 \quad (\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2) t^\alpha = 0 \iff \alpha^2 - n^2 = 0 \iff \boxed{\alpha = \pm n}$$

- b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_n$ est un plan vectoriel (espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 pouvant s'écrire sous forme résolue sur $\mathbb{R}_+^*$). Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on sait d'après la question précédente que φ_n et φ_{-n} sont solutions de $\mathcal{E}_n$; comme ces fonctions sont linéairement indépendantes (car manifestement non proportionnelles), elles forment une base de $\mathcal{E}_n$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \mathcal{E}_n = \text{Vect}(\varphi_n, \varphi_{-n})}$$

On ne dispose par contre que d'une droite (engendrée par la fonction constante φ_0) incluse dans $\mathcal{E}_0$. On résout donc directement l'équation différentielle dans le cas $n = 0$:

$$f \in \mathcal{E}_0 \iff \forall t > 0 \quad t^2 f''(t) + t f'(t) = 0 \iff \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad f'(t) = \frac{\lambda_1}{t}$$

donc

$$f \in \mathcal{E}_0 \iff \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0 \quad f(t) = \lambda_1 \ln t + \lambda_2, \text{ d'où } \boxed{\mathcal{E}_0 = \text{Vect}(\varphi_0, \ln)}$$

- 3) a) On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$; notons $\psi : \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi] \quad \psi(r, \theta) = \tilde{f}(r, \theta)e^{-in\theta}$. La fonction $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition, ce qui légitime les assertions suivantes :
- Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\psi(r, \cdot)$ est continue (comme produit de fonctions continues) donc intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$;
 - La fonction ψ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable avec :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi] \quad \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)e^{-in\theta}$$

- Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \cdot)$ est continue (comme produit de fonctions continues) donc intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$;
- Pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial r}(\cdot, \theta)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \right|$ est continue sur le compact $K = [a, b] \times [-\pi, \pi]$, donc y est bornée. En notant M_1 son maximum sur K , on a donc :

$$\forall (r, \theta) \in [a, b] \times [-\pi, \pi] \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) \right| \leq M_1$$

et la fonction constante $\theta \mapsto M_1$ est continue, positive et intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$. L'hypothèse de domination locale est donc vérifiée.

Il en résulte que la fonction $c_{n,f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec 1)b) :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta)e^{-in\theta} d\theta$$

Fixons $r \in \mathbb{R}_+^*$; les fonctions qui à θ associent respectivement $\tilde{g}(r, \theta)$ et $e^{-in\theta}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-\pi, \pi]$, et sont d'autre part 2π -périodiques, ce qui permet d'intégrer par parties et de simplifier :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta)e^{-in\theta} d\theta = \underbrace{\left[\tilde{g}(r, \theta)e^{-in\theta} \right]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi}}_{=0 \text{ par } 2\pi\text{-périodicité par rapport à } \theta} + in \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r, \theta)e^{-in\theta} d\theta$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,f})'(r) = \frac{in}{r} c_{n,g}(r)}$$

- b) On montre de même que précédemment que la fonction $c_{n,g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,g})'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \theta)e^{-in\theta} d\theta = -\frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)e^{-in\theta} d\theta = -\frac{in}{r} c_{n,f}(r)$$

par le même type d'intégration par parties, mutatis mutandis. Cela implique que $c_{n,f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en dérivant l'expression de $(c_{n,f})'$,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,f})''(r) = -\frac{in}{r^2} c_{n,g}(r) + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r) = -\frac{1}{r} (c_{n,f})'(r) + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r)$$

d'où finalement

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad r^2 (c_{n,f})''(r) + r (c_{n,f})'(r) - n^2 c_{n,f}(r) = 0 \text{ ie } \boxed{c_{n,f} \in \mathcal{E}_n}$$

Par ailleurs, f étant continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}^2$, elle est bornée sur la boule fermée unité (pour la norme euclidienne usuelle), qui est compacte. Par conséquent : $\exists M_2 \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 \leq 1 \implies |f(x, y)| \leq M_2$. On a donc a fortiori : $\forall (r, \theta) \in]0, 1] \times [-\pi, \pi] \quad \left| \tilde{f}(r, \theta) \right| \leq M_2$, d'où

$$\forall r \in]0, 1] \quad |c_{n,f}(r)| \leq M_2$$

ce qui prouve que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0. Or $c_{n,f} \in \mathcal{E}_n$; si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathcal{E}_n = \text{Vect}(\varphi_n, \varphi_{-n}) = \text{Vect}(\varphi_{|n|}, \varphi_{-|n|})$ d'après 2)b) et, des deux fonctions précédentes, seule $\varphi_{|n|}$ est bornée au voisinage de 0. De même, $\mathcal{E}_0 = \text{Vect}(\varphi_0, \ln)$ et φ_0 est bornée au voisinage de 0 tandis que $\ln$ ne l'est pas. Par conséquent, dans tous les cas, $c_{n,f} \in \text{Vect}(\varphi_{|n|})$, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists a_n \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|}$$

- c) Fixons $r \in \mathbb{R}_+^*$; l'application partielle $\tilde{f}(r, \cdot)$ est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ (donc en particulier continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer le théorème de convergence normale, selon lequel sa série de FOURIER converge (normalement sur $\mathbb{R}$) vers $\tilde{f}$. Après avoir remarqué que les $c_{n,f}$ ne sont autres que les coefficients de FOURIER exponentiels de $\tilde{f}$ et appliqué le résultat précédent, on en déduit que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \tilde{f}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

- 4) a) D'après 1)a), si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$, il en est de même de la fonction $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. En notant M_3 un majorant de $\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \right|$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a, avec la première expression de $(c_{n,f})'(r)$:

$$|(c_{n,f})'(r)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) \right| d\theta = M_3$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

- b) D'après 3)b), on a $\forall (r, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z} \quad (c_{n,f})'(r) = |n| a_n r^{|n|-1}$; mais $(c_{n,f})'$ devant être bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, cela implique (en faisant tendre r vers $+\infty$) que si $|n| \geq 2$, alors $a_n = 0$. La question 3)c) donne alors :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \tilde{f}(r, \theta) = (a_{-1}e^{-i\theta} + a_1e^{i\theta})r + a_0$$

soit encore

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \tilde{f}(r, \theta) = (a_{-1} + a_1)r \cos \theta + i(a_1 - a_{-1})r \sin \theta + a_0$$

d'où l'on déduit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (a_{-1} + a_1)x + i(a_1 - a_{-1})y + a_0$$

Il en résulte immédiatement

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a_{-1} + a_1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i(a_1 - a_{-1})$$

Par conséquent, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.

2 Quelques solutions de (1)

- 1) Soit $\psi : (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \in \mathcal{P}_2$. Alors

$$\boxed{\psi \text{ est solution de (1)} \iff 4ac - b^2 = 1}$$

- 2) Remarquons que si u est solution de (2), alors u ne peut s'annuler sur I . En supposant que $0 \notin I$, on peut alors écrire

$$\forall t \in I \quad u'(t) = -\frac{1}{2t} \left(\frac{1}{u(t)} + u(t) \right)$$

La fonction $\xi : (t, u) \mapsto -\frac{1}{2t} \left(\frac{1}{u} + u \right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}^*)^2$; en vertu du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, pour tout $(t_0, u_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$, le problème de CAUCHY
$$\begin{cases} u' = \xi(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
 admet une solution maximale (unique), qui est définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 .

- 3) Si u était solution polynômiale de (2) sur J , alors u serait constante pour des raisons de degré, et on aurait alors $u^2 = -1$, ce qui est impossible car u est à valeurs réelles. On en déduit qu'il n'existe pas de solution polynômiale de (2) sur un intervalle non vide.

- 4) a) $\Omega(J)$ est l'image réciproque de l'(intervalle) ouvert J par l'application continue (car polynômiale, ou bilinéaire sur un espace de dimension finie) $(x, y) \mapsto xy$, donc $\Omega(J)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, $\Omega(J) \neq \emptyset$ car il contient par exemple $\{1\} \times J$ et $J \neq \emptyset$. Finalement, $\Omega(J)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

- b) W est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega(J)$ en tant que composée d'une application de classe $\mathcal{C}^2$ et d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. On calcule ensuite

$$\forall (x, y) \in \Omega(J) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, y) = y^2 w''(xy), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x, y) = x^2 w''(xy)$$

et

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x, y) = xy w''(xy) + w'(xy)$$

Donc

$$W \text{ vérifie (1) sur } \Omega(J) \iff \forall (x, y) \in \Omega(J) \quad (xy w''(xy))^2 - (w'(xy) + xy w''(xy))^2 = 1$$

En développant et en simplifiant, on obtient

$$W \text{ vérifie (1) sur } \Omega(J) \iff \forall (x, y) \in \Omega(J) \quad w'(xy) (w'(xy) + 2xy w''(xy)) = -1$$

On en déduit que si w' vérifie (2) sur J , alors W vérifie (1) sur $\Omega(J)$. Réciproquement, si W vérifie (1) sur $\Omega(J)$, alors pour tout $t \in J$, on a $w'(t)(w'(t) + 2tw''(t)) = -1$ en prenant $(x, y) = (1, t)$ dans la relation précédente, donc w' vérifie (2) sur J . Finalement, $W \text{ vérifie (1) sur } \Omega(J) \iff w' \text{ vérifie (2) sur } J$.

- c) Si w est affine, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in J \quad w(t) = \alpha t + \beta$; mais alors $\forall (x, y) \in \Omega(J) \quad W(x, y) = \alpha xy + \beta$, donc W est la restriction d'une fonction de $\mathcal{P}_2$. Réciproquement, supposons que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2$.

Alors $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ sont des constantes (notées respectivement K_1 et K_2) sur $\Omega(J)$; or on a par ailleurs $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = y^2 w''(xy)$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = x^2 w''(xy)$. Supposons que w'' ne soit pas la fonction nulle sur J ; il existe alors $t_0 \in J$, que l'on peut supposer non nul par continuité de w'' , tel que $w''(t_0) \neq 0$. Il est alors possible (il y a suffisamment de points sur une hyperbole pour cela) de choisir $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 y_0 = t_0$ et $K_1 x_0^2 \neq K_2 y_0^2$: contradiction. On en déduit que $w'' = 0$ sur J , donc que w est une fonction affine. Finalement,

W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2 \iff w$ est une fonction affine.

5) Comme $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, $f_{a,b} \in \mathcal{C}^2(\Omega_{a,b}, \mathbb{R})$ et

$$\forall (x, y) \in \Omega_{a,b} \quad \frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - a, y - b), \text{ etc.}$$

Il en résulte immédiatement que $f_{a,b}$ vérifie (1) sur $\Omega_{a,b}$.

6) On peut supposer, quitte à traduire (question précédente), que $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Posons $t_0 = x_0 y_0$ et fixons $u_0 \in \mathbb{R}^*$; d'après 1), il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 et une fonction $u \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ vérifiant (2) sur J avec $u(t_0) = u_0$. Alors pour toute primitive w de u sur J , la fonction W définie comme au 4) sera solution de (1) sur $\Omega(J) = U$; on obtient ainsi (via le choix des constantes d'intégration) une infinité de fonctions de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur U . Si par ailleurs l'une de ces fonctions W appartenait à $\mathcal{P}_2$, cela impliquerait que w est affine d'après 4)c), donc u constante, ce qui est impossible d'après 3). D'où le résultat.

3 Un critère de difféomorphisme

1) Un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme est une application de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, et telle que sa réciproque soit $\mathcal{C}^1$.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$ si f est injective et sa différentielle en tout point est inversible.

Remarque préliminaire : l'inégalité $\forall (p, h) \in (\mathbb{R}^2)^2 \quad \langle dF_p(h), h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$ implique que la différentielle de F est injective (donc bijective) en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2) a) Soit $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto F(p + t(q - p))$; par composition, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) = \langle \text{grad} F(p + t(q - p)), q - p \rangle = dF_{p+t(q-p)}(q - p)$$

d'où

$$\psi(1) - \psi(0) = \boxed{F(q) - F(p) = \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q - p) dt}$$

b) On a donc

$$\langle F(q) - F(p), q - p \rangle = \left\langle \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q - p) dt, q - p \right\rangle$$

Or l'application $\langle \cdot, q - p \rangle$ (où p et q sont fixés) est linéaire, donc

$$\langle F(q) - F(p), q - p \rangle = \int_0^1 \langle dF_{p+t(q-p)}(q - p), q - p \rangle dt$$

d'où, grâce à l'hypothèse sur F et à la croissance de l'intégrale,

$$\langle F(q) - F(p), q - p \rangle \geq \int_0^1 \alpha \|q - p\|^2 dt = \alpha \|q - p\|^2$$

On remarque que cette inégalité implique que F est injective.

- 3) a) On peut écrire $G^a = N \circ F^a$ avec $N : p \mapsto \|p\|^2$ et $F^a : p \mapsto F(p) - a$. Le point a étant fixé, l'application F^a est manifestement différentiable en tout point avec $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad dF_p^a = dF_p$; par ailleurs, la relation

$$\forall (p, h) \in (\mathbb{R}^2)^2 \quad \|p + h\|^2 - \|p\|^2 = 2\langle p, h \rangle + \|h\|^2$$

montre que N est différentiable en tout point, avec $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad dN_p : h \mapsto 2\langle p, h \rangle$. On en déduit par composition que G^a est différentiable en tout point et

$$\forall (p, h) \in (\mathbb{R}^2)^2 \quad dG_p^a(h) = dN_{F^a(p)}(dF^a(h)) = 2\langle F(p) - a, dF_p(h) \rangle$$

- b) En utilisant 2)b) et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on obtient

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{R}^2)^2 \quad \|F(q) - F(p)\| \|q - p\| \geq \langle F(q) - F(p), q - p \rangle \geq \alpha \|q - p\|^2$$

d'où

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{R}^2)^2 \quad \|F(q) - F(p)\| \geq \alpha \|q - p\|$$

(l'inégalité est vraie même si $q = p$). En particulier, en notant $0 = (0, 0)$,

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|F(p) - F(0)\| \geq \alpha \|p\|$$

d'où, en vertu de l'inégalité triangulaire,

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|F(p)\| \geq \alpha \|p\| - \|F(0)\|$$

d'où, de même,

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|F(p) - a\| \geq \|F(p)\| - \|a\| \geq \underbrace{\alpha \|p\| - \|F(0)\| - \|a\|}_{\rightarrow +\infty \text{ lorsque } \|p\| \rightarrow +\infty}$$

A fortiori, $G^a(p) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|p\| \rightarrow +\infty$.

- c) D'après la question précédente :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|p\| > A \implies G^a(p) > G^a(0)$$

De plus, la restriction de la fonction continue G^a à la boule fermée $\mathcal{B}$ de centre 0 et de rayon A , qui est compacte, admet un minimum m atteint en un point p_0 ; par construction, on a alors : $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad G^a(p) \geq m$ (en effet, $\forall p \in \mathcal{B} \quad G^a(p) \geq m$ et $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B} \quad G^a(p) > G^a(0) \geq m$). Donc G^a admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

- d) La fonction G^a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et admet un minimum global en p_0 , donc sa différentielle est nulle en p_0 . On a donc d'après 3)a) :

$$\forall h \in \mathbb{R}^2 \quad \langle F(p_0) - a, dF_{p_0}(h) \rangle = 0$$

Or on a vu en 1) que dF_{p_0} est bijective, donc $dF_{p_0}(h)$ décrit $\mathbb{R}^2$ lorsque h décrit $\mathbb{R}^2$. Le vecteur $F(p_0) - a$ est donc orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, donc il est nul :

$$\boxed{F(p_0) = a}.$$

- 4) On peut maintenant appliquer le théorème rappelé au 1) : F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par hypothèse, injective d'après 2)b), surjective d'après 3) et dF est bijective en tout point d'après la remarque du 1). On en déduit que $\boxed{F \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$.

4 Le théorème de JÖRGENS

- 1) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$. On a immédiatement (en utilisant le théorème de SCHWARZ pour les dérivées croisées, car f est $\mathcal{C}^2$)

$$\text{Jac}F(x, y) - I_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice symétrique vaut 1 par hypothèse sur f , et sa trace est strictement positive comme somme de deux termes strictement positifs (comme f vérifie (1), $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont de même signe en tout point car leur produit est strictement positif, et on a supposé $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$). Donc les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice sont strictement positives, donc $\boxed{\text{Jac}F(x, y) - I_2 \text{ est symétrique (définie) positive}}$.

On a par conséquent

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2 \quad \langle dF_{(x,y)}(h), h \rangle = \|h\|^2 + \underbrace{\langle (\text{Jac}F(x, y) - I_2)(h), h \rangle}_{\geq 0} \geq \|h\|^2$$

Donc $\boxed{F \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$ (les hypothèses de la partie III sont vérifiées avec $\alpha = 1$).

- 2) a) Le système peut s'écrire sous la forme

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\Xi \circ F)(x, y) = \left(x - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \kappa(x, y)$$

en notant $\Xi = (\varphi, \psi)$. Il suffit donc de poser $\boxed{\Xi = \kappa \circ F^{-1}}$ (F est bijective d'après la question précédente), et $\boxed{\Xi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$ comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

- b) La relation précédente peut être traduite en termes de matrices jacobiniennes, avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r & -s \\ s & -1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-r & -s \\ s & -1+t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r+t+2} \begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}$$

d'où il découle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1-r+t-rt+s^2}{r+t+2} = \frac{t-r}{r+t+2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{-2s}{r+t+2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{2s}{r+t+2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{rt-s^2-r+t-1}{r+t+2} = \frac{t-r}{r+t+2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{array} \right.$$

c) On calcule astucieusement :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = \frac{t^2 + r^2 - 2rt + 4s^2}{(r+t+2)^2} = \frac{t^2 + r^2 + 2rt - 4}{(r+t+2)^2} = \frac{(r+t)^2 - 4}{(r+t)^2 + 4 + 4(r+t)} < 1$$

en utilisant $(r, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $rt - s^2 = 1$. On en déduit que $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

d) Les fonctions φ et ψ appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, vérifient les équations de CAUCHY-RIEMANN d'après 2)b), et $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. Le dernier résultat de la partie I prouve alors que $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.

e) En notant $K \in [0, 1[$ la valeur constante de $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$ du c), on voit que $r+t$ est solution de l'équation de second degré

$$(1-K)X^2 - 4KX - 4(1+K) = 0$$

Cette équation admet une racine positive et une seule et l'on peut ainsi exprimer $r+t$ en fonction de K , donc $r+t$ est constante. L'expression de $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ montre alors que s est constante, et celle de $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ que $t-r$ est constante ; finalement, r, s et t sont constantes.

3) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.

– Si $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, on peut appliquer ce qui précède ; en particulier, r, s et t sont constantes. En intégrant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = rx + h_1(y) \quad (3)$$

où h_1 est une fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à la deuxième variable (et en utilisant à nouveau le théorème de SCHWARZ), on obtient

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad s = h_1'(y)$$

donc en reportant dans (3) :

$$\exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = rx + sy + K_1$$

On intègre à nouveau par rapport à la première variable :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \frac{1}{2}rx^2 + sxy + K_1x + h_2(y)$$

(h_2 fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$). Il reste à dériver deux fois par rapport à la deuxième variable :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = t = h_2''(y)$$

d'où finalement

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \frac{1}{2}rx^2 + sxy + \frac{1}{2}ty^2 + K_1x + K_2y + K_3$$

où K_1, K_2 et K_3 sont des constantes, donc $f \in \mathcal{P}_2$.

– Si l'on n'est pas dans le cas $r > 0$, on a nécessairement $r < 0$ car la relation (1) implique que $r \neq 0$. Il suffit alors d'appliquer la démarche précédente à la fonction $-f$, qui appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie également (1).

Dans tous les cas : les seules fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) appartiennent à $\mathcal{P}_2$.