

Concours Communs Mines-Ponts

Correction - MP1

Avril 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Mines MP 2013 - Epreuve 1

A. Formes bilinéaires symétriques plates.

1) Question de cours.

• Comme φ est une forme bilinéaire, l'application $\tilde{\varphi} : \begin{cases} E = \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E^* = (\mathbb{R}^n)^* \\ x & \longmapsto & \varphi(x, \cdot) \end{cases}$ est linéaire de $E = \mathbb{R}^n$ dans son dual $E^* = (\mathbb{R}^n)^*$. Par ailleurs, comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel est un espace euclidien.

Or d'après le théorème de représentation des formes linéaires :

Le théorème de représentation de Riesz :

$\Psi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, \cdot \rangle \in (\mathbb{R}^n)^*$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Preuve :

Ψ est clairement une application linéaire injective entre deux $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, de même dimension donc elle est bijective.

Ainsi

$$[\varphi(x, y) = \langle u(x), y \rangle \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n] \iff [\tilde{\varphi}(x) = (\Psi \circ u)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n]$$

$$[\varphi(x, y) = \langle u(x), y \rangle \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n] \iff \tilde{\varphi} = \Psi \circ u$$

Comme Ψ est bijectif, on a donc

$$[\varphi(x, y) = \langle u(x), y \rangle \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n] \iff u = \Psi^{-1} \circ \tilde{\varphi}.$$

Ainsi u existe et est unique, de plus u est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même par composition d'applications linéaires.

Comme φ est symétrique, on a pour tout $(x; y)$ de $(\mathbb{R}^n)^2$:

$$\langle u(x), y \rangle = \varphi(x, y) = \varphi(y, x) = \langle u(y), x \rangle = \langle x, u(y) \rangle \quad (\text{par symétrie du produit scalaire})$$

Ainsi u est bien symétrique.

• Comme u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour u . Ainsi en notant λ_i la valeur propre associée à e_i , on obtient pour tout $i \neq j$: $\varphi(e_i, e_j) = \langle u(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = 0$

Ainsi φ est bien diagonalisable.

2) • L'application $a \otimes b$ est bien définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; elle est bilinéaire car $(a \otimes b)(x, \cdot) = a(x)b$ est linéaire (puisque $a(x)$ est un réel et b est linéaire) et $(a \otimes b)(\cdot, x) = b(x)a$ aussi et ce pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

• Si a est nulle alors $a \otimes b$ est symétrique car c'est l'application nulle.

Si a n'est pas nulle alors soit x_0 dans $\mathbb{R}^n$ avec $a(x_0) \neq 0$.

Analysons la situation : si $a \otimes b$ est symétrique alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a $(a \otimes b)(x_0, y) = (a \otimes b)(y, x_0)$ i.e. $a(x_0)b(y) = b(x_0)a(y)$ donc $b = \mu a$ avec $\mu = b(x_0)/a(x_0)$ (car $a(x_0) \in \mathbb{R}^*$).

Réciproquement si b s'écrit μa avec $\mu \in \mathbb{R}$ alors $a \otimes b = \mu a \otimes a$ donc est symétrique puisque dans $(a \otimes b)(x, y) = \mu a(x)a(y)$ les rôles de x et y sont bien symétriques.

Enfinement $a \otimes b$ est symétrique si et seulement si $a = 0$ ou (a, b) est liée, donc finalement si et seulement si a et b sont liées.

3) D'après la question 1., φ est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ pour laquelle $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Dans la base $\mathcal{E}$, la matrice M de φ est donc diagonale avec en ligne i et colonne i le réel $\varphi(e_i, e_i)$. Par hypothèse M est de rang 1 car φ l'est, tous les coefficients diagonaux $\varphi(e_i, e_i)$ de M sont donc nuls sauf un. Quitte à changer l'ordre des vecteurs de la base $\mathcal{E}$, on suppose $\mu = \varphi(e_1, e_1) \neq 0$ et $\varphi(e_i, e_i) = 0$ pour tout $i = 2 \dots n$.

Alors on pose $f = \sqrt{|\mu|}e^*$ avec e^* l'unique forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ qui envoie e_1 sur 1 et les e_i pour i de 2 à n sur 0 (i.e. e^* est l'application première coordonnée dans $\mathcal{E}$). On obtient alors $f \otimes f = |\mu|e^* \otimes e^*$ donc $\varphi = f \otimes f$ si $\mu > 0$ et $\varphi = -f \otimes f$, l'égalité des applications bilinéaires étant obtenue en observant qu'elles ont même matrice dans la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$.

4) Avec les notations de la questions précédentes, si φ est de rang 1 alors il existe $\varepsilon = \pm 1$ et une forme linéaire f avec $\varphi = \varepsilon f \otimes f$. Ainsi pour tout x, y, z et w de $\mathbb{R}^n$, on a $\langle \varphi(x, y), \varphi(z, w) \rangle = \varphi(x, y)\varphi(z, w) = \varepsilon^2 f(x)f(y)f(z)f(w) = \varepsilon^2 f(x)f(w)f(z)f(y) = \langle \varphi(x, w), \varphi(z, y) \rangle$. Ainsi une forme bilinéaire de rang 1 est toujours plate.

5) Si φ est une forme bilinéaire plate non nulle alors via la question 1, elle est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ pour laquelle $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Dans la base $\mathcal{E}$, la matrice de φ est diagonale et non nulle (car φ est supposée non nulle), donc il existe ℓ avec $\varphi(e_\ell, e_\ell) \neq 0$. Comme φ est plate, on obtient

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ avec } i \neq \ell, \langle \varphi(e_\ell, e_\ell), \varphi(e_i, e_i) \rangle = \langle \varphi(e_\ell, e_i), \varphi(e_\ell, e_i) \rangle \text{ i.e. } \varphi(e_\ell, e_\ell) \cdot \varphi(e_i, e_i) = 0$$

Donc comme $\varphi(e_\ell, e_\ell) \neq 0$, on a $\varphi(e_i, e_i) = 0$ pour tout $i \neq \ell$. Ainsi la matrice de φ dans la base $\mathcal{E}$ est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sauf un (celui ligne ℓ) sont nuls donc elle est de rang 1 et donc φ est de rang 1.

B. Diagonalisation simultanée.

6) • Si u_{i_0} admet un sous-espace propre (pour la valeur propre λ) de dimension n alors ce sous-espace propre est E tout entier car inclus dans E et de même dimension que E , et $u_{i_0} = \lambda Id$ donc u est une homothétie ce qui n'est pas. Ainsi les sous-espaces propres de u_{i_0} sont tous de dimension strictement inférieure à n .

• Redémontrons que si deux endomorphismes commutent, tout espace propre de l'un est stable par l'autre. Soit u un endomorphisme commutant avec u_{i_0} , alors pour tout x dans le sous-espace propre de u_{i_0} associé à la valeur propre μ , on a

$$u_{i_0}(u(x)) = (u_{i_0} \circ u)(x) = (u \circ u_{i_0})(x) = u(u_{i_0}(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \text{ par linéarité de } u.$$

Ainsi $u(x)$ appartient à $\ker(u_{i_0} - \mu Id)$, le sous-espace propre de u_{i_0} associé à la valeur propre μ .

Ainsi tout sous-espace propre de u_{i_0} est stable par tout u_i (car u_i commute avec u_{i_0}).

7) • Si tous les endomorphismes u_i sont des homothéties alors dans toute base orthonormée de E , tous les u_i ont une matrice diagonale (même scalaire).

• Sinon, on choisit i_0 tel que u_{i_0} ne soit pas une homothétie, alors d'après le théorème spectral, E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u_{i_0} .

Soit F un sous-espace propre de u_{i_0} , alors via la question 6., F est stable par tous les u_i donc on peut considérer les endomorphismes $\tilde{u}_i^F$ induits sur F par les u_i .

Ces endomorphismes $\tilde{u}_i^F$ sont autoadjoints car les u_i le sont, et commutent deux à deux car les u_j commutent deux à deux. Donc par hypothèse de récurrence comme F est de dimension strictement inférieure à n (via la question 6.), il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_F$ de F dans laquelle les matrices de $\tilde{u}_i^F$ sont toutes diagonales. La réunion (concaténation) des bases orthonormées $\mathcal{B}_F$ de F , quand F décrit la famille finie des sous-espaces propres de u_{i_0} , donne une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E (car E est somme directe orthogonale de ces sous-espaces). Dans $\mathcal{B}$, la matrice de u_i est diagonale par blocs avec pour blocs les matrices $\tilde{u}_i^F$ dans les bases $\mathcal{B}_F$ des sous-espaces propres de u_{i_0} qui sont diagonales par choix des $\mathcal{B}_F$. Ainsi on a trouvé une base orthonormée de E dans laquelle tous les u_i ont une matrice diagonale.

• On a vu que le résultat que l'on veut prouver est vrai pour $\dim(E) = 1$, qu'il est récurrent (s'il est vrai pour tout E avec $\dim(E) < n$ alors il reste vrai pour tout E de dimension n donc pour tout E de dimension strictement inférieure à $n + 1$). Donc par le principe de récurrence, il est vrai pour tout n .

C. Vecteurs réguliers.

8) • Si B est inversible alors $\det(A + tB) = \det((AB^{-1} + tI)B) = \det(B) \det(AB^{-1} + tI)$ or $A + tB$ est inversible si et seulement si $\det(A + tB) \neq 0$ donc comme $\det(B) \neq 0$, on trouve que $A + tB$ est inversible si et seulement si $\det(AB^{-1} + tI) \neq 0$ i.e. $-t$ n'est pas racine du polynôme caractéristique de AB^{-1} qui admet au plus n racines donc $A + tB$ est inversible pour tout t de $\mathbb{R}$ sauf pour au plus n valeurs.

Si A est inversible alors $\det(A) \neq 0$ et pour tout $t \neq 0$, on a $\det(A + tB) = \det(t(t^{-1}I + BA^{-1})A) = t^n \det(A) \det(t^{-1}I + BA^{-1})$. Donc pour $t \neq 0$, $A + tB$ est inversible si et seulement si $\det(A + tB) \neq 0$ i.e. $\det(t^{-1}I + BA^{-1}) \neq 0$ i.e. $-t^{-1}$ non racine du polynôme caractéristique de BA^{-1} (qui en admet au plus n). Ainsi $A + tB$ est inversible sauf peut-être pour $n + 1$ valeurs de t .

Finalement si A ou B est inversible, $A + tB$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de t .

Autre méthode.

Comme d'une part le déterminant d'une matrice est polynomial en les coefficients de la matrice, et d'autre part les coefficients de $A + tB$ sont polynomiaux en t , il résulte que $\det(A + tB)$ est un polynôme P en t . Or si A est inversible, $P(0) = \det(A) \neq 0$, et sinon B est inversible et $P(0) = \det(A) = 0$ avec $t^n P(1/t) = \det(tA + B)$ qui tend vers $\det(B) \neq 0$ quand t tend vers 0 ce qui prouve que $t^n P(1/t)$ donc $P(1/t)$ n'est pas nul pour t assez grand, ainsi P n'est pas un polynôme constant. Donc P admet un nombre fini de racines et $P(t) = \det(A + tB)$ est non nul sauf pour un nombre fini de valeurs de t , ainsi $A + tB$ est inversible sauf pour ce nombre fini de valeurs de t .

9. La famille $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ de $\mathbb{R}^p$ étant libre, on a $r \leq p$ et via le théorème de la base incomplète, on complète cette famille en une base $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de $\mathbb{R}^p$. On complète la famille $(b_1, \dots, b_r)$ par des vecteurs nuls en $(b_1, \dots, b_p)$.

On note A la matrice de $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ (i.e. la matrice dont la j ème colonne est formée des coordonnées de a_j dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$) et B celle de $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$. La première famille étant libre, A est inversible donc via la question 8., la matrice $A + tB$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de t (disons $A + tB$ non inversible pour t dans J). Or $A + tB$ est la matrice de $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \dots, a_p + tb_p)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, donc pour $t \notin J$, cette famille est libre et la sous-famille $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \dots, a_r + tb_r)$ aussi.

Ainsi $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \dots, a_r + tb_r)$ est libre sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de t (celles de J).

10. Soit x dans $\mathbb{R}^n$ et y dans $\ker \tilde{\varphi}(v)$ i.e. $\varphi(v, y) = 0$. Comme v est régulier pour φ , l'image $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$ est de

dimension q , donc il existe une famille libre $(e_1, \dots, e_q)$ telle que $(\tilde{\varphi}(v)(e_i))_{1 \leq i \leq q}$ engendre $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$. Supposons (par l'absurde) que $\varphi(x, y)$ n'est pas dans $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$. Ainsi la famille $(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q), \varphi(x, y))$ i.e. $(\varphi(v, e_1), \dots, \varphi(v, e_q), \varphi(x, y))$ est libre. Donc via la question 9., il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $t \in V$, la famille $f = (\varphi(v, e_1) + t\varphi(x, e_1), \dots, \varphi(v, e_q) + t\varphi(x, e_q), \varphi(x, y) + t0)$ est libre. Par linéarité de φ , la famille $f = (\varphi(v + tx, e_1), \dots, \varphi(v + tx, e_q), \varphi(x, y))$ est libre, pour tout t dans V . Donc en choisissant s dans V avec $s \neq 0$, la famille $(\varphi(v + sx, e_1), \dots, \varphi(v + sx, e_q), s\varphi(x, y))$ est libre et comme $\varphi(v, y) = 0$, on obtient la liberté de $(\varphi(v + sx, e_1), \dots, \varphi(v + sx, e_q), \varphi(v + sx, y))$ i.e. de $g(e_1), \dots, g(e_q), g(y)$ avec $g = \tilde{\varphi}(v + sx)$. Ainsi $\text{Im} g = \text{Im} \tilde{\varphi}(v + sx)$ est de dimension au moins $1 + q$ ce qui contredit la définition de q . Donc $\varphi(x, y)$ appartient à $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$.

11. • Procédons par double inclusion.

Soit x dans $\ker \varphi$. Alors par définition $\tilde{\varphi}(x) = 0$ donc $\varphi(x, v) = \tilde{\varphi}(x)(v) = 0$ et par symétrie de φ , on a bien $\tilde{\varphi}(v)(x) = \varphi(v, x) = \tilde{\varphi}(x)(v) = 0$. Donc x est dans $\ker \tilde{\varphi}(v)$. Ainsi $\ker \varphi \subset \ker \tilde{\varphi}(v)$.

Réciproquement, soit y dans $\ker \tilde{\varphi}(v)$. Fixons x dans $\mathbb{R}^n$. D'après la question 10., le vecteur $\varphi(x, y)$ est dans $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$ i.e. il existe z_x dans $\mathbb{R}^n$ avec $\varphi(x, y) = \varphi(v, z_x)$. Ainsi dans $\mathbb{R}^p$, on a

$\langle \varphi(x, y), \varphi(x, y) \rangle = \langle \varphi(v, z_x), \varphi(x, y) \rangle = \langle \varphi(v, y), \varphi(x, z_x) \rangle$ (car φ est plate).

Or $\varphi(v, y) = (\tilde{\varphi}(v))(y) = 0$ donc $\|\varphi(x, y)\|^2 = \langle \varphi(x, y), \varphi(x, y) \rangle = 0$ et donc $\|\varphi(x, y)\| = 0$ i.e. par séparation d'une norme $(\tilde{\varphi}(y))(x) = \varphi(x, y) = 0$. Ainsi tout x est dans le noyau de $\tilde{\varphi}(y)$ donc $\tilde{\varphi}(y)$ est nul donc par définition y est dans $\ker \varphi$.

Finalement, pour tout vecteur régulier v de φ , les noyaux $\ker \tilde{\varphi}(v)$ et $\ker \varphi$ sont égaux.

• Si $\ker \varphi = \{0\}$ alors en considérant un vecteur régulier v pour φ , l'application $\tilde{\varphi}(v)$ est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, injective car de noyau $\ker \tilde{\varphi}(v) = \ker \varphi$ réduit à $\{0\}$. Donc $\dim \mathbb{R}^p \geq \dim \mathbb{R}^n$ i.e. $p \geq n$.

12. Soit v régulier pour φ . Alors $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$ est de dimension q donc il existe une famille libre $(e_1, \dots, e_q)$ telle que $(\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q))$ est une base de $\text{Im} \tilde{\varphi}(v)$. Via le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $f_1, \dots, f_r$ tels que $\mathcal{B} = (\tilde{\varphi}(v)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(v)(e_q), f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathbb{R}^p$.

Alors par linéarité de $x \mapsto \tilde{\varphi}(x)$, l'application $\Psi_v : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q), f_1, \dots, f_r)$ est polynômiale en les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, donc continue. Elle vaut 1 en v donc il existe un voisinage $\mathcal{W}_v$ de v dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel Ψ_v ne s'annule pas. Ainsi pour tout x dans $\mathcal{W}_v$, la famille $(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q), f_1, \dots, f_r)$ est libre donc la sous-famille $(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q))$ aussi ce qui prouve que $\text{Im} \tilde{\varphi}(x)$ est de dimension au moins q donc q car q est la dimension maximale d'une telle image par définition. Ainsi x est un vecteur régulier.

Finalement tout vecteur régulier admet un voisinage formé uniquement de vecteurs réguliers donc l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs réguliers pour φ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

13. Soit x un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et v un vecteur régulier pour φ . Avec les notations de la question précédente, la matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ i.e. $B = I_p$ est inversible. Donc en notant A la matrice de la famille $(\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x)(e_q), f_1, \dots, f_r)$ dans $\mathcal{B}$, la question 8. assure que $A + tB$ est inversible pour tout réel t sauf peut-être ceux d'un ensemble fini T . De plus $A + tB$ est, par bilinéarité de φ , la matrice de $(\tilde{\varphi}(x + tv)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x + tv)(e_q), (1 + t)f_1, \dots, (1 + t)f_r)$ dans $\mathcal{B}$.

Notons $\varepsilon > 0$ le minimum de $T \cap \mathbb{R}_+^*$ si cet ensemble est non vide, et 1 sinon. Alors pour tout entier $m > 1/T$, la matrice $A + \frac{1}{m}B$ de $(\tilde{\varphi}(x + v/m)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x + v/m)(e_q), f_1, \dots, f_r)$ dans $\mathcal{B}$ est inversible donc $(\tilde{\varphi}(x + v/m)(e_1), \dots, \tilde{\varphi}(x + v/m)(e_q))$ est libre et comme dans la question 12. cela permet de conclure que $x + v/m$ est un vecteur régulier pour φ . Ainsi la suite $(x + v/m)_{m > [1/T] + 1}$ (avec $[\cdot]$ la partie entière) est une suite de vecteurs réguliers pour φ qui converge vers x .

Cela prouve que tout vecteur x est dans l'adhérence de $\mathcal{V}$ i.e. $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

D. Le cas $p = n$ de noyau nul.

14. Comme φ est bilinéaire, symétrique et plate, et v est un vecteur régulier pour φ , la question **11.** assure que le noyau $\ker \tilde{\varphi}(v)$ vaut $\ker \varphi$ donc est réduit au vecteur nul. Ainsi l'application linéaire $\tilde{\varphi}(v)$ est injective et est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (car $p = n$ donc $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p$). Donc (par le théorème du rang par exemple) l'endomorphisme $\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme.

15. Pour tout u et w de $\mathbb{R}^n$, on a, en notant $u' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(u)$ et $w' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(w)$:

$$\langle \Psi(x)(u), w \rangle = \langle \tilde{\varphi}(x)(u'), \tilde{\varphi}(v)(w') \rangle = \langle \varphi(x, u'), \varphi(v, w') \rangle$$

or comme φ est plate, on a $\langle \varphi(x, u'), \varphi(v, w') \rangle = \langle \varphi(x, w'), \varphi(v, u') \rangle$ donc par ce qui précède

$$\langle \Psi(x)(u), w \rangle = \langle \Psi(x)(w), u \rangle = \langle u, \Psi(x)(w) \rangle \text{ (par symétrie du produit scalaire).}$$

Ainsi $\Psi(x)$ est bien autoadjoint pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

16. • Pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$ et tout w et z de $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n$, on a, toujours en notant $w' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(w)$ et $z' = [\tilde{\varphi}(v)]^{-1}(z)$

$$\langle (\Psi(x) \circ \Psi(y))(z), w \rangle = \langle (\Psi(y))(z), \Psi(x)(w) \rangle \text{ car } \Psi(x) \text{ est autoadjoint via } \mathbf{15.}$$

$$= \langle \varphi(y, z'), \varphi(x, w') \rangle \text{ par définition de } \Psi$$

$$= \langle \varphi(y, w'), \varphi(x, z') \rangle \text{ car } \varphi \text{ est plate}$$

$$= \langle \Psi(y)(w), \Psi(x)(z) \rangle$$

$$= \langle w, (\Psi(y) \circ \Psi(x))(z) \rangle \text{ car } \Psi(y) \text{ est autoadjoint via } \mathbf{15.}$$

$$= \langle (\Psi(y) \circ \Psi(x))(z), w \rangle \text{ par symétrie du produit scalaire}$$

Ainsi par linéarité de $\langle \cdot, w \rangle$, le vecteur $(\Psi(x) \circ \Psi(y))(z) - (\Psi(y) \circ \Psi(x))(z)$ est orthogonal à tout vecteur w de $\mathbb{R}^n$ donc est nul, et ce pour tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$ donc $\Psi(x) \circ \Psi(y) = \Psi(y) \circ \Psi(x)$.

• Les $\Psi(x)$ forment une famille d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, autodajoints (question **15.** qui commutent 2 à 2 donc via les questions de **B.**, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle tous les $\Psi(x)$ ont une matrice diagonale.

17. Via la question **14.**, $\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ donc $(f_1 = (\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_1), \dots, f_n = (\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Or pour tout $i = 1 \dots n$, chaque e_j est vecteur propre de $\Psi(f_i)$ via la question **16.** donc il existe $\lambda_i(j) \in \mathbb{R}$ avec $(\Psi(f_i))(e_j) = \lambda_i(j) e_j$.

Ainsi pour tout $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$, on a : $\varphi(f_i, f_j) = (\tilde{\varphi}(f_i))((\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_j)) = \Psi(f_i)(e_j) = \lambda_i(j) e_j$

et par symétrie de φ , on a aussi $\varphi(f_i, f_j) = \varphi(f_j, f_i) = \lambda_j(i) e_i$.

Mais la famille (e_i, e_j) est libre (comme sous-famille d'une base de $\mathbb{R}^n$ donc $\lambda_i(j) e_j = \lambda_j(i) e_i$ impose $\lambda_j(i) = \lambda_i(j) = 0$ donc $\varphi(f_i, f_j) = 0$.

Finalement à l'aide de la base $((\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_1), \dots, (\tilde{\varphi}(v))^{-1}(e_n))$ de $\mathbb{R}^n$, on a obtenu que φ est diagonalisable.