Commentaires

Les erreurs et imprécisions

1) Tout d'abord **la question III.1 est fausse** telle quelle. Il me semble que la meilleure façon de la rectifier est de supposer les fonctions C_n positives.
2) Pour la même raison, il serait bon de rectifier la question IV.2.i) en demandant à C_n d'être à valeurs positives.
3) En IV.3.i), il serait tout aussi raisonnable de demander de vérifier que J_n est à valeurs positives.
4) En V.1.ii) la notation $M(x, y)$ n'a aucun sens puisque M est une matrice dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ et que (x, y) est un vecteur ligne. Il faudrait préciser la notation qui n'est d'ailleurs utilisée qu'une seule fois.
5) Le théorème de Fubini admis ne permet pas de traiter directement la question V.2 puisqu'on intègre sur $\mathbf{R} \times [-\pi, \pi] \times \mathbf{R}$ a priori. Il aurait été plus raisonnable d'admettre un cas plus général.
6) Toujours en V.2 je ne comprends pas à quoi sert l'hypothèse sur ϕ. En V.3 on se sert de $\phi = 1$ et en V.4 on a besoin d'une fonction de deux variables. L'hypothèse est plus gênante qu'autre chose.
7) En V.4 la variable x n'est pas définie.
8) La question I.1 mériterait d'être en préliminaire : elle est utile pour traiter la partie II.
9) En fait les parties I et II **ne sont pas indépendantes**. Outre la question I.1 qui sert en partie II, la question I.3 est une conséquence de la question II.3.
10) L'écriture sous forme d'opérateur, utilisée uniquement en I.2.i), de $[x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}]$ aurait pu être expliquée. Mais le plus grave est la confusion entre fonction et valeurs sans aucune mise en garde : $f(x)f(y)$ est compris comme une fonction.
11) Il y a une virgule en trop après « lorsque » en question II.2.ii). D'une façon générale il y a peut-être trop de virgules.

Les points gênants

1) La connaissance du lemme de Gronwall avantageait les candidats puisqu'il s'agit de la question III.2. Il me semble que donner une indication aurait équilibré les chances de chacun(e).
2) La question III.3 est calquée sur la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz donnée par le théorème du point fixe de Picard. Une fois encore les étudiant(e)s ayant vu la démonstration en cours étaient avantagé(e)s. Il me semble que donner des indications aurait permis d'équilibrer les chances de chacun(e).
3) L'interprétation géométrique et, avec elle, une notation plus commode pour $(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$ seraient bienvenues. Par exemple

$$\begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

4) L'équation (3) est illisible. Il me semble que le numéro d'équation devrait au minimum se trouver à la fin de l'équation. Par ailleurs une notation pour $x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$ et $x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$ permettrait de tout faire tenir sur une ligne.
5) En partie IV, T_1 désigne un réel (a priori différent selon la question) et en partie V c'est une matrice triangulaire.
6) La définition de f en fin de partie IV est maladroite.
7) Les partie IV et V sont très techniques et souffrent d'une absence de notations qui rend l'ensemble très lourd à manipuler. On pourrait au moins donner une notation pour les fonctions continues et bornées, voire même pour les fonctions telles que $(t, x) \mapsto f(t, x)\exp(x^2/2)$ est continue et bornée. Nommer $x \mapsto \exp(x^2/2)$ et toutes les fonctions intervenant permettrait aussi d'alléger les énoncés, tout comme les réponses.
8) La question V.1 n'a pas vraiment d'intérêt et pourrait largement être admise. Son aspect technique n'apporte rien et il y a déjà de nombreuses questions techniques.
9) En V.2 l'équation est illisible et pourrait tenir sur une seule ligne avec des notations adéquates.
10) En V.4 l'apparition d'une valeur absolue est troublante, même si elle est correcte.

Les détails

1) La répétition des « On note ... l'ensemble » en début de sujet n'est pas très heureuse.
2) La notation $\mathbf{Q}_+$ n'est utilisée qu'une fois : on pourrait s'en dispenser.
3) On n'a jamais besoin de matrices non inversibles. On pourrait noter $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.
4) La rédaction du sujet, bien que globalement compréhensible, pourrait être plus soignée. Quelques exemples :
   a) L'utilisation de parenthèses et de crochets de tailles adaptées faciliterait la lecture, par exemple via l'utilisation de \left et \right en LaTeX.
   b) « On suppose dans cette partie que $f \in F$ est ... ». Le mélange langage/métalangage est incorrect.
   c) « est de classe $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ ». Soit f est de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, soit f appartient à $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$.
   d) L'écriture « $\forall x, y, \theta \in \mathbf{R}$ » est incorrecte.
   e) L'écriture « $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ t \in [0, 1]$ » est incorrecte. Le mieux aurait sans doute été de redoubler le quantificateur universel.
   f) L'écriture « fonctions $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continues » est incorrecte.
   g) L'écriture « telles que $|g(x, y)| \leq H\exp(-L(x^2 + y^2))$ pour des constantes H, $L > 0$ données » est incorrecte, de même que « Soit $T > 0$, $B > 0$, et $D > 0$ ».
   h) Ceci conduit notamment à la phrase « pour K_1 et $T_1 > 0$ » où il n'est pas clair que K_1 est également un réel strictement positif.
   i) Les nombreuses parenthèses alourdissent la lecture et pourraient avantageusement être omises. Exemple : « la fonction r (de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$) définie par ».
   j) Il me parait inutile, quoique très courant, de rajouter des « que » avant les assertions à démontrer.
   k) L'usage de « Montrer », quoique très courant, est incorrect.
   l) La notation $-$ pour les ensembles n'est pas très agréable.

Composition de mathématiques C - (ULC)
ENS 2013 – MP

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$. On note $\mathbf{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls. On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Pour I intervalle de $\mathbf{R}$, et L un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, on note $C(I, L)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans L et $C^1(I, L)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 de I dans L.

On note $M_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées à deux lignes (et deux colonnes) dont les coefficients sont réels.

On note F l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant

$$\forall x, y, \theta \in \mathbf{R}\,, \quad f(x\cos\theta - y\sin\theta)f(x\sin\theta + y\cos\theta) = f(x)f(y)\ .$$

Les parties I, II et III sont indépendantes.

I

On suppose dans cette partie que f appartient à F et est de classe C^1.

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2\,, \quad f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})f(0)\ .$$

2. i) Calculer (pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$) les quantités $[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}](f(x)f(y))$ et $[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}](f(\sqrt{x^2 + y^2}))$.

   ii) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad f'(x) = \alpha x f(x)\ .$$

   iii) Quelles sont les fonctions de $F \cap C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$?

II

On suppose dans cette partie que $f \in F$ est dans $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$.

1. Montrer que si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 0$.
2. On suppose dans ce paragraphe que $f(0) \neq 0$.

   i) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \neq 0$.

   ii) On considère la fonction r (de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$) définie par $r(x) = \ln\left(\frac{f(\sqrt{x})}{f(0)}\right)$. Trouver une relation entre $r(x + y)$, $r(x)$ et $r(y)$, lorsque, $x \in \mathbf{R}_+$, $y \in \mathbf{R}_+$.

iii) Trouver une relation entre $r(s)$ et $sr(1)$ pour $s \in \mathbf{N}$, puis pour $s \in \mathbf{Q}_+$, et enfin pour $s \in \mathbf{R}_+$.

3. Quelles sont les fonctions de $F \cap C(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$?

III

1. Soit $A > 0$, $K > 0$, et $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $C([0,1], \mathbf{R})$ telles que pour tout $t \in [0,1]$, $C_0(t) \leq A$, et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\,,\ t \in [0,1]\,, \quad C_{n+1}(t) \leq A + K \int_0^t C_n(s)^2 \, \mathrm{d}s\,. \tag{1}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\,,\ t \in [0, \inf(\frac{1}{4AK}, 1)]\,, \quad C_n(t) \leq 2A\,.$$

2. Soit $T > 0$, $B > 0$, et $D > 0$ des constantes, et ϕ une fonction de $C([0,T], \mathbf{R}_+)$ telle que

$$\forall t \in [0,T]\,, \quad \phi(t) \leq B + D \int_0^t \phi(s) \, \mathrm{d}s\,.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0,T]\,, \quad \phi(t) \leq Be^{Dt}\,.$$

3. Soit $T_1 > 0$, $A_1 > 0$, $K_1 > 0$ des constantes, et $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $C([0,T_1], \mathbf{R}_+)$ telles que pour tout $t \in [0,T_1]$, $J_0(t) \leq A_1$, et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\,,\ t \in [0,T_1]\,, \quad J_n(t) \leq K_1 \int_0^t [J_n(s) + J_{n-1}(s)] \, \mathrm{d}s\,. \tag{2}$$

i) Montrer que pour tout $t \in [0,T_1]$, $n \in \mathbf{N}^*$,

$$J_n(t) \leq K_1 e^{K_1 T_1} \int_0^t J_{n-1}(s) \, \mathrm{d}s\,.$$

ii) En déduire que pour $t \in [0,T_1]$, $n \in \mathbf{N}^*$,

$$J_n(t) \leq A_1 \frac{[K_1 T_1 e^{K_1 T_1}]^n}{n!}\,.$$

IV

Dans cette partie et la suivante, f_{in} est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ telle que $x \mapsto f_{in}(x)\exp(x^2/2)$ est continue et bornée.

1. i) Montrer que l'on peut trouver une unique suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[0,1] \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $(t,x) \in [0,1] \times \mathbf{R} \mapsto f_n(t,x)\exp(x^2/2)$ est continue et bornée, $t \in [0,1] \mapsto f_n(t,x) \in C^1([0,1], \mathbf{R})$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, et (pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(t,x) \in [0,1] \times \mathbf{R}$)

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t}(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{\mathbf{R}} \Big[f_n(t, x\cos\theta - y\sin\theta) f_n(t, x\sin\theta + y\cos\theta) - f_{n+1}(t,x) f_n(t,y) \Big] \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}\theta\,, \tag{3}$$

$$f_{n+1}(0,x) = f_{in}(x)\,,$$

et

$$f_0(t,x) = f_{in}(x)\ .$$

Pour cela, on commencera par mettre l'équation (3) sous la forme

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial t}(t,x) = a_n(t) f_{n+1}(t,x) + b_n(t,x)\,,$$

où a_n et b_n sont des fonctions continues (définies à partir de f_n) judicieusement choisies.

ii) Montrer que pour $n \in \mathbf{N}$ et $(t,x) \in [0,1] \times \mathbf{R}$, on a $f_n(t,x) \geq 0$

2. i) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}\,,\ t \in [0,1]\,,\ x \in \mathbf{R}\,, \quad 0 \leq f_n(t,x) \leq C_n(t)\ \exp(-x^2/2)\,,$$

avec $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suite de fonctions de $C([0,1],\mathbf{R})$ telles que (1) est vérifiée (pour A, K convenablement choisis en fonction de f_{in}).

ii) En déduire qu'il existe $T_1 \in]0,1]$ et $A > 0$ tels que

$$\forall t \in [0,T_1]\,,\ n \in \mathbf{N}\,, \quad C_n(t) \leq 2A\ .$$

3. i) Montrer que (pour tout $n \in \mathbf{N}$)

$$\forall t \in [0,1]\,,\ x \in \mathbf{R}\,, \quad |f_{n+1}(t,x) - f_n(t,x)| \leq J_n(t)\ \exp(-x^2/2)\,,$$

avec $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suite de fonctions de $C([0,1],\mathbf{R})$ telles que pour tout $t \in [0,1]$ (et $n \in \mathbf{N}^*$),

$$J_n(t) \leq 2\pi \int_{\mathbf{R}} \exp(-y^2/2)\,\mathrm{d}y \left[\int_0^t (2C_n(s) + C_{n-1}(s))J_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t C_n(s)J_n(s)\,\mathrm{d}s\right]\ .$$

ii) En déduire que la suite de fonctions $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie (2) (pour K_1 et $T_1 > 0$ convenablement choisis).

iii) Montrer qu'il existe $T \in]0,1]$ pour lequel la suite $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R} \mapsto f_n(t,x)\ \exp(x^2/2)$ converge uniformément sur $[0,T] \times \mathbf{R}$. On notera $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R} \mapsto f(t,x)\ \exp(x^2/2)$ la limite de cette suite.

4. Montrer que f est une fonction telle que $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R} \mapsto f(t,x)\ \exp(x^2/2)$ est continue et bornée, $t \in [0,T] \mapsto f(t,x) \in C^1([0,T],\mathbf{R}_+)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbf{R}} \Big[f(t, x\cos\theta - y\sin\theta) f(t, x\sin\theta + y\cos\theta) - f(t,x)f(t,y)\Big]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\theta\,,$$

$$f(0,x) = f_{in}(x)\ .$$

V

Dans cette partie, f désigne une fonction obtenue à la question IV.4.

On échangera par ailleurs dans cette partie sans justification les signes $\int$ (théorème de Fubini) lorsque les intégrandes sont des fonctions $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continues telles que $|g(x,y)| \leq H \exp(-L(x^2 + y^2))$ pour des constantes H, $L > 0$ données.

1. i) Montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ est une matrice inversible telle que $d \neq 0$, il existe une matrice triangulaire supérieure inversible $T_1 \in M_2(\mathbf{R})$ et une matrice triangulaire inférieure inversible $T_2 \in M_2(\mathbf{R})$ telles que

$$M = T_1 T_2 \,.$$

ii) Soit $H,\ L > 0$, h une fonction continue de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $|h(x,y)| \leq H\ \exp(-L(x^2+y^2))$, et $M \in M_2(\mathbf{R})$ une matrice inversible. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |Det(M)| \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(M(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,.$$

2. Montrer que pour toute fonction ϕ de $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que $x \mapsto \frac{\phi(x)}{1+x^2}$ est bornée, on a (pour $t \in [0,T]$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}} f(t,x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(t,x\cos\theta - y\sin\theta)f(t,x\sin\theta + y\cos\theta)$$

$$-f(t,x)f(t,y)\Big] \times \Big[\phi(x)+\phi(y)-\phi(x\cos\theta - y\sin\theta)-\phi(x\sin\theta + y\cos\theta)\Big]\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,.$$

3. i) Calculer (pour $t \in [0,T]$) la quantité $\int_{\mathbf{R}} f(t,x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de f_{in}.

ii) Montrer que (pour $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbf{R}$),

$$f(t,x) \geq f_{in}(x) e^{-2\pi t \int_{\mathbf{R}} f_{in}(y)\,\mathrm{d}y} \,.$$

4. Dans cette question, on suppose qu'il existe $S_1,\ S_2 > 0$, tels que

$$f_{in}(x) \geq S_1 e^{-S_2|x|^2} \,.$$

i) Montrer que la quantité $\int_{\mathbf{R}} f(t,x)\ln f(t,x)\,\mathrm{d}x$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0,T]$ et que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}} f(t,x)\ln f(t,x)\,\mathrm{d}x \leq 0 \,.$$

On pourra pour cela s'inspirer du résultat obtenu à la question .2.

Il s'agit d'une version simplifiée de la première partie du *Théorème H* de Boltzmann, dans lequel on montre la croissance de l'entropie $-\int f\ln f$ d'un gaz raréfié.

ii) Montrer que si l'on a (pour $t \in [0,T]$ donné)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}} f(t,x)\ln f(t,x)\,\mathrm{d}x = 0 \,,$$

alors on peut trouver $C_1,\ C_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad f(t,x) = C_1 e^{-C_2 x^2} \,.$$

Il s'agit d'une version simplifiée de la seconde partie du *Théorème H* de Boltzmann, dans lequel on montre que si la densité dans l'espace des phases d'un gaz raréfié est d'entropie maximale, alors c'est une fonction Maxwellienne de la vitesse des molécules (ici représentée par une fonction Gaussienne centrée).