Concours Communs Polytechniques - Session 2013

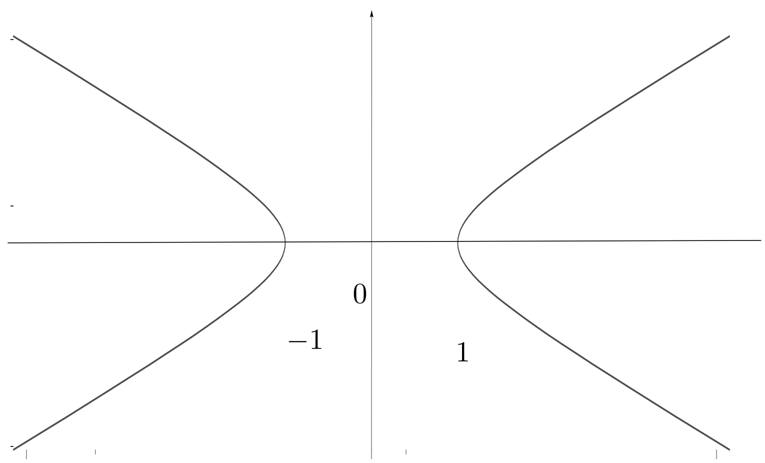
Corrigé de l'épreuve de mathématiques 2
Filière MP

Séries de Fourier, systèmes différentiels et séries entières

Corrigé par M.TARQI [1]-htpp :// alkendy.x10.mx

Exercice 1 : points à coordonnées entières sur une hyperbole

1. L'hyperbole coupe les axes aux points $(1,0)$ et $(-1,0)$.



2. Algorithme :
   variables x,y : entiers ;
   début

   pour $y \leftarrow 0$ à 200 faire

   pour $x \leftarrow 0$ à racine$(1+13y^2)$ faire

   si ($x^2 - 13y^2 = 1$) alors

   écrire (x,y) ;

   fin si

   fin pour x

   fin pour y

   fin

1. tout commentaire, toute remarque ou éventuelle rectification, concernant ce corrigé, seront les bienvenus

3. Programme avec Maple :
   > for y from 0 to 200

   ```
   do
      for x from 0 to floor(sqrt(1 + 13 * y * y))
         do if(x^2 - 13 * y^2 = 1) then printf("(d,d)",x,y) ;fi ;
      od ;
   od ;
   ```

   Maple donne deux solutions $(1, 0)$ et $(649, 180)$.

Problème : matrices " toutes-puissantes"

Partie I : quelques exemples

1. *Le cas de taille 1*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors on sait que tout nombre réel positif admet une racine n-ième, autrement dit $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.
   (b) Les racines n-ièmes de $b = re^{i\theta}$ sont de la forme $\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (c) 0 est TP$\mathbb{C}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = 0^n$, et d'après la question précédente tous les nombres complexes non nuls sont TP$\mathbb{C}$, donc $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
2. *Une condition nécessaire...*
   (a) Supposons qu'une matrice A est dans $T_p(\mathbb{K})$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$ et donc $\det(A) = \det(B^n) = [\det(B)]^n$, et comme n est quelconque dans $\mathbb{N}^*$, alors $\det A \in T_1(\mathbb{K})$.
   (b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin T_2(\mathbb{R})$, car $\det(A) = -1 \notin T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.
3. *... mais pas suffisante*
   Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$, on obtient donc le système :

$$(S) \quad \begin{cases} a^2 + bc = -1 & (1) \\ b(a+d) = 0 & (2) \\ c(a+d) = 0 & (3) \\ cb + d^2 = -2 & (4) \end{cases}$$

   Si $b = 0$, l'équation (1) conduit à une contradiction. Si $a + d = 0$, on obtient, par soustraction de (4) de (1), $a^2 - d^2 = 1$ ce qui conduit à une autre contradiction. Donc le système (S) est impossible, ainsi une telle matrice B n'existe pas.
   En conclusion, la condition donnée par la question 2. n'est pas suffisante puisque $\det(A) = 2 \in T_1(\mathbb{R})$ et $A \notin T_2(\mathbb{R})$.

4. *Un cas ou A est diagonalisable*

   (a) Le polynômecaractéristique de A est $-X^3+5X^2-8X+4=(1-X)(X-2)^2$, donc les valeurs propres de A sont 1 et 2. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est engendré par les vecteurs $(1,0,1)$ et $(3,2,0)$, il est donc de dimension 2, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

   (b) D'après ce qui précède, A est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, il existe donc une matrice inversible P telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[n]{2} \end{pmatrix} P^{-1}$ vérifie l'égalité $B^n = A$. Donc $A \in T_3(\mathbb{R})$, c'est à dire A est TP$\mathbb{R}$.

   (c) Pour $n=2$, on prend la matrice $B_2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$ et pour $n=3$, on prend la matrice $B_3 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} P^{-1}$.

   On choisit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (les colonnes de P sont les vecteurs propres de A), donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et par conséquent

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -3+3\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & -3+4\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \\ -2+2\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

   et

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt[3]{2} & -3+3\sqrt[3]{2} & -2+\sqrt[3]{2} \\ 2-2\sqrt[3]{2} & -3+4\sqrt[3]{2} & -2+\sqrt[3]{2} \\ -2+2\sqrt[3]{2} & 3-3\sqrt[3]{2} & 2-\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

5. *Un exemple de nature géométrique*

   (a) On $A^tA = I_2$ et $\det(A) = 1$, donc A représente une rotation vectorielle, c'est la rotation d'angle π.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{n}) & -\sin(\frac{\pi}{n}) \\ \sin(\frac{\pi}{n}) & \cos(\frac{\pi}{n}) \end{pmatrix}^n$, donc la matrice A est TP$\mathbb{R}$.

6. *Le cas des matrices nilpotentes*

(a) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de N, alors il existe V une vecteur non nul tel que

$$NV = \lambda V$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N^n V = \lambda^n V = 0$ et comme $V \neq 0$, alors $\lambda = 0$ et par suite 0 est la seule valeur propre de N, ainsi $\chi_N(X) = (-1)^p X^p$ (le polynômecaractéristique de N) et donc, par le théorème de Cayley-Hamilton, $N^p = 0$.

(b) Supposons que N est TP$\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors il existe $B \in \mathscr{M}_p(K)$ tel que $N = B^n$ et donc $N^p = B^{pn} = 0$, donc B est nilpotente et par conséquent $B^p = 0$, c'est à dire $N = 0$.

Partie II : le cas où le polynômecaractéristique est scindé

7. Les polynômes$P_i = (X - \lambda_i)^{r_i}$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux on a

$$\ker \chi_A(u) = \ker(u - \lambda_1 id_{\mathbb{K}^p})^{r_1} \oplus ... \oplus \ker(u - \lambda_k id_{\mathbb{K}^p})^{r_k}.$$

Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\ker \chi_A(u) = \mathbb{K}^p$, d'où l'égalité demandée :

$$\mathbb{K}^p = C_1 \oplus ... \oplus C_k.$$

8. (a) Soit $x \in \ker Q(u)$, alors $Q(u)(v(x)) = Q(u) \circ v(x) = v \circ Q(u)(x) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \ker Q(u)$, ainsi $\ker Q(u)$ est stable par v.

(b) Les polynômesP_i sont des polynômesen u, donc ils commutent avec u, et donc les sous-espaces $\ker P_i = C_i$ sont stables par u.

9. Les polynômes$Q_i = \dfrac{\chi_A}{P_i}$ sont premiers entre eux donc par Bezout, il existe $R_1, ..., R_k$ des polynômestels que

$$Q_1 R_1 + ... + Q_k R_k = 1.$$

On pose $p_i = R_i(u) Q_i(u)$. On a donc $\sum_{i=1}^{k} p_i = id_{\mathbb{K}^p}$, $p_i^2 = p_i$ et $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$.

On vérifie facilement que Im$p_i \subset C_i$. En effet si $x \in$ Imp_i, alors $x = p_i(y)$ et donc

$$P_i(u)(x) = R_i(u) Q_i(u) P_i(u)(y) = R_i(u) \chi_A(u)(y) = 0.$$

On en déduit que $x \in C_i$. Dans ces conditions les deux décompositions $\mathbb{K}^p = \mathrm{Im} p_1 \oplus ... \oplus \mathrm{Im} p_k$ et $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus ... \oplus C_k$ coincident nécessairement.
Soit $x \in C_i$ et y tel que $x = p_i(y)$, alors

$$\begin{array}{rcl} (u_{C_i})^{r_i}(x) & = & (u_{C_i} - \lambda_i id_{C_i})^{r_i}(R_i(u) Q_i(u)(y)) \\ & = & R_i(u)(X - \lambda_i id_{C_i})^{r_i}(u) Q_i(u)(y)) \\ & = & R_i(u) \chi_A(u)(x) = 0. \end{array}$$

Donc u_{C_i} est nilpotent.

10. Dans une base $\mathscr{B}_i$ de C_i la matrice de u_{C_i} s'écrit donc $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ avec N_i nilpotente. Ainsi dans la base $(\mathscr{B}_1, ..., \mathscr{B}_k)$ adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus ... \oplus C_k$, la matrice est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_{p_1} I_{p_1} + N_1, ..., \lambda_{p_k} I_{p_k} + N_k)$ et par conséquent on peut trouver une matrice inversible P telle que

$$A = P \,\mathrm{diag}(\lambda_{p_1} I_{p_1} + N_1, ..., \lambda_{p_k} I_{p_k} + N_k) P^{-1}.$$

11. Supposons que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $B_i \in \mathscr{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $\lambda_i I_{p_i} + N_i = B_i^n$, alors la matrice
$$B = P\,\mathrm{diag}(B_1, ..., B_k)P^{-1}$$
vérifie $B^n = A$, donc A est une matrice TP$\mathbb{K}$.

Partie III : le cas des matrices nilpotentes

12. *Une application des développements limités*
   (a) Par la division euclidienne, il existe Q et R des polynômesde $\in \mathbb{R}[X]$ tels que
   $$V = X^p Q + R$$
   avec $R = 0$ ou $\deg R < p$. Si $R \neq 0$, la quantité $\dfrac{V(x)}{x^p} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{x^p}$ ne tend pas vers 0, donc nécessairement $R = 0$ et donc $V = X^p Q$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
   $$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{n}} &= 1 + \frac{1}{n}x + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)...(\frac{1}{n}-p+1)}{p!}x^p + o(x^p)\\ &= U_n(x) + o(x^p)\end{aligned}$$
   avec $U_n(x) = 1 + \dfrac{1}{n}x + \dfrac{\frac{1}{n}(\frac{}{n}-1)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)...(\frac{1}{n}-p+1)}{p!}x^p$. D'où
   $$1 + x = [U_n(x) + o(x^p)]^n = [U_n(x)]^n + \sum_{k=1}^{n} \complement_n^k [U_n(x)]^{n-k}[o(x^p)]^k = [U_n(x)]^n + o(x^p).$$
   (c) On pose $V(x) = o(x^p)$. D'après ce qui précède V est un polynôme, donc il existe un polynôme$Q$ tel que $V = X^p Q$ et donc l'égalité précédente se traduit par la relation :
   $$1 + X = U^n + X^p Q.$$
13. *Application*
   (a) D'après les résultats de la question 12, on a $I_p + N = (U(N))^n + N^p(Q(N) = (U(N))^n$ donc $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Supposons que λ est TP$\mathbb{K}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ non nul tel que $\lambda = \mu^n$ et donc
   $$\lambda I_p + N = \lambda(I_p + \frac{N}{\lambda}).$$
   La matrice $\dfrac{N}{\lambda}$ est nilpotente, donc $I_p + \dfrac{N}{\lambda}$ est TP$\mathbb{K}$, donc on peut trouver une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $I_p + \dfrac{N}{\lambda} = B^n$, ainsi $\lambda I_p + N = (\mu B)^n$, c'est à dire $\lambda I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.
14. *Le résultat annoncée*
   (a) D'après la question 10., toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ inversible est semblable à matrice de la forme
   $$\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, ..., \lambda_k I_{p_k} + N_k),$$
   où les λ_i sont non nuls. Mais pour chaque i, il existe B_i tel que $\lambda_i I_{p_i} + N_i = B_i^n$. On conclut donc avec la question 11.

(b) D'après la question 6.b) les matrices nilpotentes non nulles ne sont pas des TP$\mathbb{C}$.

15. Considérons la matrice non inversible A d'ordre 4 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = X(X-1)^3$ et le sous-espace caractériosque associé à 1 est de dimension 1 (engendé par $e_2 = (0,1,0,0)$ donc A est non diagonalisable. D'autre part, N est nilpotente ($N^3 = 0$), donc B est TP$\mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = C^n$ et par conséquent $A = [\mathrm{diag}(0, C)]^n$, c'est à dire A est TP$\mathbb{R}$.

••••••••••