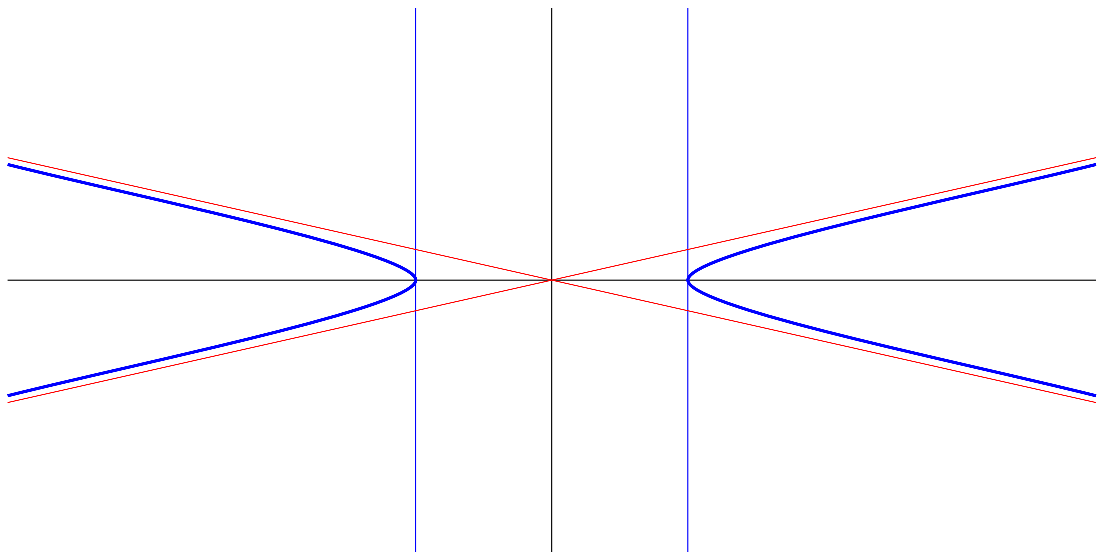
CCP 2013

Mathématiques B

Un corrigé proposé par : ***AQALMOUN MOHAMED*** *agrégé de mathématiques CPGE Khouribga*

EXERCICE

1. *L'équation réduite de l'hyperbole est* $\dfrac{x^2}{1^2} - \dfrac{y^2}{(1/\sqrt{13})^2} = 1$*, les tangentes aux pointe* $(1,0)$ *et* $(-1,0)$ *ont pour équations :* $x = 1$ *et* $x = -1$.
   Les équations des asymptotes sont : $x = \sqrt{13}y$ *et* $x = -\sqrt{13}y$.



2. *D'abord, si* x *et* y *sont positif, alors* x *à pour expression* $x = \sqrt{13y^2+1}$*, donc les solutions positifs de l'équation* $x^2 - 13y^2 = 1$*, sont de la forme* $(\sqrt{13y^2+1}, y)$*,* $y \in \mathbb{R}_+$*, pour les solutions demandés, il faut ajouter les deux conditions suivantes :* $y \leq 200$ *et* $x = E(x)$ *la partie entière de* x.
   Il faut, alors chercher les valeurs de $y \leq 200$ *pour lesquelles* $\sqrt{13y^2+1}$ *est un entier.*
   L'algorithme :

   Pour y *de* 0 *à* 200 *faire,*
   $x = \sqrt{13y^2+1}$,
   Si $x = E(x)$ *"floor(x)"* *renvoyer* (x, y)
   fin si ;
   fin faire,
   fin.

3. *Un exemple avec* ***WxMaxima*** *;*

```
Sol :=block([x,i],
for i :0 thru 200 do (
x :sqrt(13*i^2+1),
if x=floor(x) then display([x,i])
))$
Sol;
[x,y]=[1,0]
[x,y]=[649,180]
done
```

PROBLÈME :
Matrices toutes puissances

Première partie : Quelques exemples

1. Le cas de taille 1 : on identifie les matrices de taille 1 et les éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Si $a \in \mathbb{R}$, avec $a \geq 0$, alors ,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b^n = a$ avec $b = \sqrt[n]{b}$.
   Si $a \in T_1(\mathbb{R})$, en particulier pour $n = 2$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a = b^2 \geq 0$.
   (b) Les racines n-ièmes complexes de a, sont $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1 \ldots, n-1$.
   (c) D'après la question précédente :pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout nombre complexe non nul b, il existe $z \in \mathbb{C}$, tel que $b = z^n$, et on a aussi $0 = 0^n$, donc $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = B^n$, par la multiplicativité du déterminant on a $\det A = \det B^n = (\det B)^n$, donc $\det A \in T_1(\mathbb{C})$.
   (b) Considèrons la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $\det A = -1 \notin T_1(\mathbb{R})$, donc $A \notin T_2(\mathbb{R})$.
3. Si une telle matrice B existe , alors $AB = B^3 = BB^2 = BA$, c'est-à-dire que les deux matrice A et B commutent, mais d'autre part $AB = BA$; entraîne que $b = c = 0$, ainsi la matrice B est diagonale , et l'égalité $A = B^2$ donne des équations impossibles dans $\mathbb{R}$; $a^2 = -1$ et $d^2 = -2$.
4. (a) Le polynôme caractéristique de A est $-(X-2)^2(X-1)$, et son polynôme minimal est $(X-2)(X-1)$ scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. De plus elle est semblable à la matrice $D = \operatorname{diag}(2, 2, 1)$.
   (b) Elle existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $A = P \operatorname{diag}(2, 2, 1)P^{-1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et B la matrice $P \operatorname{diag}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}, 1)$, on a alors $B^n = A$, donc A est $TP\mathbb{R}$.
   (c) • $n = 2$, prenons $B = P \operatorname{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)P^{-1} = \ldots$
   • $n = 3$, prenons $B = P \operatorname{diag}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, 1)P^{-1} = \ldots$
5. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

   Remarque : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta)$ est inversible et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $R(\theta)^n = R(n\theta)$.
   (a) ${}^tAA = A^tA = I_2$ et $\det A = 1$, donc A est une matrice de rotation vectorielle, dont une mesure d'angle $\theta = \pi$ $(\cos\theta = -1)$.

   (b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R(\frac{\pi}{n})^n = R(\pi) = A$, donc A est $TP\mathbb{R}$.*

6. (a) *Le polynome caractéristique de N est $(-1)^p X^p$, donc $N^p = 0$.*

   (b) *Supposons N est $TP\mathbb{R}$, et soit B une matrice telle que $B^p = A$, on a alors $B^{2p} = (B^p)^p = 0^p = 0$, donc la matrice B est nilpotente, par suite $B^p = 0$, d'où $A = B^p = 0$, la matrice A est nulle.*

Deuxième partie :
Le cas où le polynôme caractéristique est scindé

7. *Les polynômes $(X-\lambda_i)^{r_i}$, $i = 0, \dots, k$ sont premiers entre eux, et leurs produit est un polynôme annulateur de A, donc par le théorème des noyaux, on a :*
   $\mathbb{K}^d = \ker(A-\lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \ker(A-\lambda_k)^{r_k} = C_1 \oplus \dots \oplus C_k$.

8. (a) *v commute avec u, alors v commute avec tout polynôme en u, en particulier v commute avec $P(u)$; si $x \in \ker(P(u))$ alors $P(u)(v(x)) = (P(u)\circ v)(x) = (v \circ P(u))(x) = v(P(u)(x)) = 0$, donc $v(x) \in \ker(P(u))$.*

   (b) *u commute avec $u - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathbb{K}^d}$, donc $C_i = \ker(A - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathbb{K}^d})^{r_i}$ est stable par u.*

9. *Pour $x \in C_i$, on a ; $(u_{C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i})^{r_i}(x) = (u - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathbb{K}^d})^{r_i}(x) = 0$ donc $(u_{C_i} - \lambda \operatorname{Id}_{C_i})^{r_i} = 0$, ainsi l'endomorphisme $u_{C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$ est nilpotent.*

10. *Pour $i = 1, \dots, k$, notons par g_i l'endomorphisme $u_{C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$, g_i est un endomorphisme nilpotent de C_i et $u_{C_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i} + g_i$, pour $1 \le i \le k$, on fixe une base $\mathcal{B}_i$ de C_i et notons N_i la matrice de g_i dans la base $\mathcal{B}_i$, considérons la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^d$ construite à partir des base $\mathcal{B}_i$ qui est une base adaptée à la décomposition $C_1 \oplus \dots \oplus C_k$, la matrice de A dans cette base est une matrice par bloc, où chaque bloc est la matrice de $u_{C_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i} + g_i$ dans la base $\mathcal{B}_i$ qui est de la forme $\lambda_i I_{p_i} + N_i$, donc dans cette base ($\mathcal{B}$) la matrice de A est de la forme : $\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$, elle existe alors une matrice $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_1 I_{p_k} + N_k)P^{-1}$.*

11. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $i = 1, \dots, k$; soit B_i une matrice telle $B_i^n = \lambda_i I_{p_i} + N_i$, notons aussi par B la matrice par bloc $B = P \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)P^{-1}$, par un produit par bloc, on obtient $B^n = A$, donc la matrice A est $TP\mathbb{K}$.*

Troisième partie :
Le cas des matrices unipotentes

12. (a) *Soit $V = X^pQ + R$ avec $\deg R < p$, la division euclidienne de V par X^p, au voisinage de 0 on a $V(x)x^p + R(x) = x^p o(x^p)$, mais $V(x)x^p = o(x^{p-1})$, et donc $R(x) + o(x^{p-1}) = o(x^{p-1})$ deux développements limités à l'ordre $p-1$, par unicité de la partie entière, on a $R(x) = 0$, ou encore $R = 0$, d'où $V = X^p + Q$.*

    (b) *Notons U la partie régulière du développement limité à l'ordre p, de $(1+x)^{\frac{1}{n}}$, de sorte que $(1+x)^{\frac{1}{n}} = U(x) + o(x^p)$, on a alors :*
    $1 + x = (U(x) + o(x^p))^n = U(x)^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_n^k U(x)^{n-k}(o(x))^k$ *et d'autre part, pour tout* $1 \le k \le n$:
    $U(x)^{n-k}(o(x^p))^k = o(x^p)[U(x)^{n-k}(o(x^p))^{k-1}]$, *et donc* $U(x)^{n-k}(o(x^p))^k = o(x^p)$, *il en résulte que* $1 + x = U(x)^n + o(x^p)$.

    (c) *On a $1 + x - U(x)^n = o(x^p)$, d'après la question 12.a, il existe un polynôme Q, tel que $1 + X - U(X)^n = X^pQ$, c'est-à-dire $1 + X = U^n + X^pQ$.*

13. (a) *D'après la question précédente, ils existent deux polynômes U et Q dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $1 + X = U^n + X^pQ$, on applique cette relation à N, on obtient $I_p + N = U(N)^n + N^pQ(N)$, et comme N est nilpotente, alors $N^p = 0$ et $I_p + N = U(N)^n$, donc $I_p + N$ est $TP\mathbb{K}$.*

(b) $\lambda I_p + N = \lambda(I_p + \lambda^{-1}N)$, et puisque la matrice $\lambda^{-1}N$ est nilpotente, alors $I_p + \lambda^{-1}N$ est $TP\mathbb{K}$; soit $n \in \mathbb{N}^*$, ils existent une matrice B et un scalaire α tels que $B^n = I_p + \lambda^{-1}N$ et $\alpha^n = \lambda$; alors $(\alpha B)^n = \lambda(I_p + \lambda^{-1}N) = \lambda I_p + N$.

14. (a) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique de A est scindé, notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A. On sait d'après la partie II, que A peut s'écrire sous la forme $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$. Or la matrice A est inversible, alors les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont tous non nulles, et d'après la question précédente les matrice $\lambda_k I_{p_k} + N_k$ sont $TP\mathbb{C}$, puis par les résultats de la partie II, la matrice A est $TP\mathbb{C}$.

   (b) Déjà pour $p \geq 2$, les matrices nilpotentes non nulles ne sont pas des matrices $TP\mathbb{C}$.

15. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
C'est une matrice non inversible, et n'est pas diagonalisable.
Considérons aussi les deux matrices : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = \mathrm{diag}(B, C)$, et comme $B = I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente, alors les deux matrices B et C sont des matrices $TP\mathbb{R}$, ainsi la matrice A est $TP\mathbb{R}$.