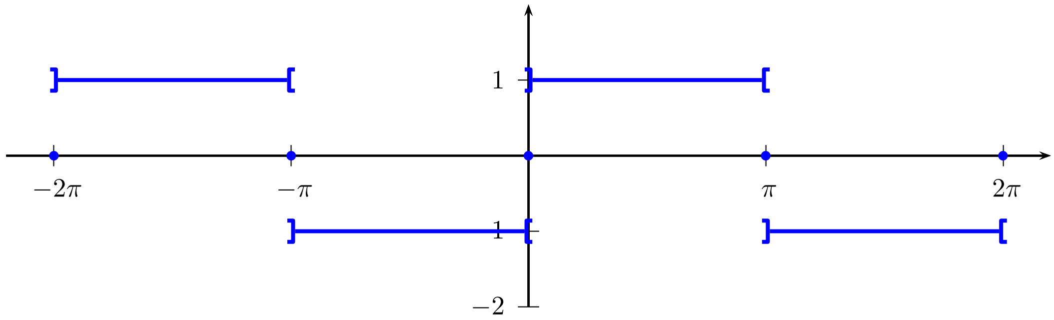
Concours Communs Polytechniques
Correction - CCP - MP
Mai 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Exercice 1 : Une série de Fourier

1. **Représenter f, puis déterminer la série de Fourier de la fonction f.**
   Représentation de f.



Série de Fourier de f.

– La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique, donc les coefficients de Fourier de f sur $\mathbb{R}$ sont définies. On note alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f.

– La fonction f est impaire donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$.
De ce fait,
$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, b_{2k+1}(f) = \dfrac{4}{(2k+1)\pi}}$ et $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, b_{2k}(f) = 0}$.

2. **Existence et convergence des sommes : (a) et (b).**

– **Théorème de Dirichlet**
La fonction f est 2π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers sa régularisée $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t) = \dfrac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$.
Or la fonction f est sa propre régularisée donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x) = f(x)} \tag{1}$$

– **Calculons (a) :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Pour $x = \pi/2$ dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} &= 1\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Et donc on a montré que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}}$$

– **Calculons (b) :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

La fonction f est continue par morceaux et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ donc d'après la relation de Parseval, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ converge et :

$$\boxed{\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Donc ici :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(b_{2k+1}(f)\right)^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^2\,\mathrm{d}t\\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2k+1)\pi}\right)^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,\mathrm{d}t\\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{(2k+1)^2\pi^2} &= \frac{1}{2\pi}\times 2\pi\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} &= \frac{1\times 2\times\pi^2}{16}\end{aligned}$$

Pour conclure on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

Exercice 2 : Un système différentiel

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t\in\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{aligned}x' &= x-y\\ y' &= x+3y\end{aligned}\right.$$

1. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

   Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B=A-2I_2$ est nilpotente.

   – **Montrons que B est nilpotente**.

   On a : $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}1-X & -1\\ 1 & 3-X\end{vmatrix}=(1-X)(3-X)+1$

   Et donc $\boxed{\chi_A(X)=X^2-4X+4=(X-2)^2}$.

Le théorème de Cayley-Hamilton précise que le polynôme caractéristique de A, est un polynôme annulateur de A, donc :

$$\chi_A(A) = 0 \iff (A - 2I_2)^2 = 0_2 \iff B^2 = 0_2$$

La matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente d'ordre 2.

– **Donnons l'expression de e^{tA}.**

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t(B+2I_2)} = \mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{2tI_2}$$
$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\ \mathrm{e}^{tB}$$
$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!}$$
$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\left(I_2 + tB + \sum_{n\geq 2}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!}\right)$$, or pour tout n entier, $n \geq 2$ on a $B^n = 0$ donc
$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\,(I_2 + tB)$$

De ce fait : $\forall t\ \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\,(I_2 + tB)}$.

2. **En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant :** $\left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right.$

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système et les conditions initiales se réécrit matriciellement sous la forme équivalence suivante : $\left\{\begin{array}{r} X' = AX \\ X(0) = {}^t(1,2) \end{array}\right.$.

Par théorème, ce problème de Cauchy linéaire à coefficients constants admet une unique solution.

La solution du système est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{X_0(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

En utilisant la question précédente on obtient :
$$e^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\,(I_2 + tB)$$
$$e^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\,(I_2 + t(A - 2I_2))$$
$$e^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}\right)$$
$$e^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \qquad t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$\boxed{e^{tA} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & t+1 \end{pmatrix}}.$$

Par la suite il vient,

$$X_0(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & t+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$X_0(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}$$

La solution unique du système est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \boxed{X_0(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix} \text{ soit } \left\{\begin{array}{l} x(t) = \mathrm{e}^{2t}(1-3t) \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t}(2+3t) \end{array}\right.}$$

Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de R et à valeurs réelles.

Partie préliminaire

1. **Justifier, pour tout réel** $x \in]-1\ ;\ 1[$**, l'existence de** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ **et donner sa valeur**.

   – La règle de d'Alembert montre que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est de rayon de convergence 1.
   Donc cette série géométrique est convergente sur $]-1\ ;\ 1[$ et C^{∞} sur cet intervalle ouvert.

   – La série dérivée $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ est donc aussi convergente sur $x \in]-1\ ;\ 1[$.

   – Or la série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a pour somme $\dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1\ ;\ 1[$.
   Donc la série dérivée a pour somme :

$$x \in]-1\ ;\ 1[,\quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

   Démontrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty$**,** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ **et en déduire, pour tout entier naturel** n **non nul, la valeur de** $\Gamma(n)$.

   – **Non demandé : montrons que la fonction** Γ **est définie pour tout réel** $x \in]0, +\infty[$.

   - Notons f la fonction définie par $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t\ ;\ x) & \longmapsto & f(t\ ;\ x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$
     et pour tout réel x, la fonction f_x définie par $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_x(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$

   - Pour tout réel x, $t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$ et donc f_x est définie, continue et positive $\forall t \in]0, +\infty[$.

   - **En 0**.
     On a $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \sim_{t\to 0^+} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable sur $]0, +1]$ pour $1 - x < 1$.
     Donc f_x intégrable sur $]0, +1]$ si et seulement si $x > 0$.

   - **En** $+\infty$.
     On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \left(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\right) = 0$, pour tout réel x, d'après le théorème des croissances comparées
     On a donc $f_x = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et f_x intégrable sur $]1, +\infty]$ pour tout réel x.

   - Pour conclure, $\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est définie si et seulement si } x \in]0, +\infty[}$.

– **Montrons que** $\forall x \in]0,+\infty$**,** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Soit $x > 0$.
Fixons deux réels a et b tels que $0 < a < b$.
On considère les fonctions u et v définies sur le segment $[a,b]$ et classe C^1 sur $[a,b]$ telles que :
$\begin{cases} u'(t) = e^{-t} & ; \quad u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t^x & ; \quad v'(t) = xt^{x-1} \end{cases}, \forall t \in [a,b]$
Alors $\displaystyle\int_a^b t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$.

Par le théorème d'intégration par parties :

$$\int_a^b t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Soit

$$\boxed{\int_a^b t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_a^b + \int_a^b xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t}.$$

Or $\left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_a^b = -b^x \mathrm{e}^{-b} + a^x \mathrm{e}^{-a}$

Et pour $x > 0$, $\begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^x \mathrm{e}^{-b} & = & 0 \text{ (Th. croissances comparées)} \\ \displaystyle\lim_{a\to 0} a^x \mathrm{e}^{-a} & = & 0 \end{cases}$

On fait tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, on a alors les deux intégrales convergent respectivement vers $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t & \longrightarrow & \Gamma(x+1) \\ \displaystyle\left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_a^b + \int_a^b xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t & \longrightarrow & 0 + x\Gamma(x) \end{cases}$$

Par unicité de la limite, on a donc montré que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ,\quad \boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

– **Calculons alors pour tout entier naturel** n **non nul, la valeur de** $\Gamma(n)$.

- On a $\displaystyle\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$
  Or $\displaystyle\int_0^b \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^b = -\mathrm{e}^{-b} + 1$ et donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$
  Donc $\boxed{\Gamma(1) = 1}$.
- Montrons par récurrence sur l'entier n que $\boxed{\mathcal{P}(n) : \text{Pour } n \text{ entier naturel, } n > 0,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$.

  - **Initialisation** : Pour $n = 1$ on a bien $\Gamma(1) = 1 = 0!$.
  - **Hérédité** : Supposons que pour n fixé, $\Gamma(n) = (n-1)!$ alors puisque $\forall x \in]0,+\infty[\ ,\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on a pour $x = n$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \times (n-1)! = n!$.
  - **Conclusion** : On a montré que la propriété est vraie au rang $n = 1$ et que si on la suppose vraie au rang n, elle l'est au rang suivant. De ce fait :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ \Gamma(n) = (n-1)!}$$

3. **Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral)** :

   Si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t}$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat

$$\boxed{P(n) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t}$$

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, f est C^∞ sur I et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t &= f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

     Donc le prédicat $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

   - **Hérédité**
     Supposons que pour l'entier n fixé, $P(n)$ soit vraie alors

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t$$

$$A(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t$$

$$A(x) = \left(f(x) - \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t$$

     Cela en utilisant le prédicat $P(n)$.

$$\boxed{A(x) = f(x) - \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t} \quad (2)$$

     On va alors intégrer par partie la deuxième intégrale.

     On considère les fonctions u et v définies sur et classe C^1 sur I telles que :

$$\left\{\begin{array}{lll} u'(t) = f^{(n+2)}(t) & ; \quad u(t) = f^{(n+1)}(t) & \\ v(t) = \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} & ; \quad v'(t) = \dfrac{-(x-t)^n}{n!} & ,\forall t \in I \end{array}\right.$$

     Alors $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$.

     Par le théorème d'intégration par parties :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t.$$

     Soit

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t = \left[f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x - \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{-(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t = -f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t} \quad (3)$$

En utilisant cette égalité (3) dans l'égalité (2) on obtient

$$A(x) = f(x) - \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$$
$$+ \left(-f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t \right)$$
$A(x) = f(x)$

Et donc le prédicat $P(n+1)$ est vrai.

- **Conclusion**

  On a montré que la propriété est vraie au rang $n = 0$ et que si on la suppose vraie au rang n, elle l'est au rang suivant. De ce fait :

  Si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t}$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Par théorème, $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* & , \quad \dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} = f(x) \\ \text{Et pour } x = 0 & , \quad \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = 1 = f(0) \end{cases}$$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}}$.

f admet donc un développement en série entière sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

Cette fonction est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. **Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f^{(n)}(0) = n.n!$**

$]-1, 1[$ est un voisinage de 0.

D'après la question 1,

$$\forall x \in]-1\ ;\ 1[, \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

Donc

- D'une part, $\forall x \in]-1, 1[\,, \dfrac{x}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$.

  La fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ est donc développable en série entière sur l'intervalle

$]-1, 1[$.

– D'autre part, elle est de classe $C^\infty\,(]-1, 1[)$ et d'après le théorème rappelé,
$\forall x \in]-1\,;\,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

On a donc $\forall x \in]-1\,;\,1[$

$$\begin{cases} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \end{cases}$$

Soit par unicité du développement en série entière

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n.n!}$$

6. **Un théorème des moments**.

(a) f est de classe C^∞ donc en particulier, continue sur $]-R, R[$.
Or $[0, 1] \subset]-R, R[$ car $R > 1$.
Donc f est continue sur le segment $[0, 1]$. Par théorème elle est bornée.
Il existe et on le fixe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$.
Par théorème, pour tout réel du disque ouvert de convergence $]-R, R[$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est absolument convergente.

Or $1 \in]-R, R[$ donc $\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$ est le terme général d'une série convergente.

Enfin, $\forall x \in [0, 1], \left|f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leq M \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$ donc $\sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leq M \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$.

Par définition, la série de fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) Pour tout $x \in [0, 1], \sum_{n=0}^{\infty} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)^2$.

Donc la série de fonction précédemment étudiée converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto (f(x))^2$. Les fonctions sont continues.

Par théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 f(x) x^n \, \mathrm{d}x = 0$.

La fonction $x \mapsto f(x)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $[0, 1]$ donc par théorème, cette fonction est nulle et $\forall x \in [0, 1], f(x)^2 = 0$.

Par le caractère intègre de $\mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], f(x) = 0$.

(c) Soit $a \in]0, 1[$ fixé. Au voisinage de a, f est identiquement nulle donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall a \in]0, 1[\,, f^{(n)}(a) = 0$ donc $f^{(n)}$ est nulle sur $]0, 1[$.

Par continuité de $f^{(n)}$ en 0 (à droite), $f^{(n)}(0) = 0$.
Donc $\forall x \in]-R, R[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.
Conclusion : f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R, R[$.

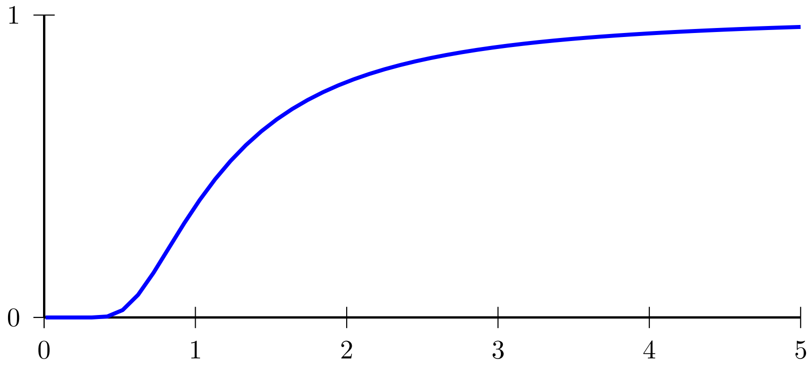
Partie 2 : contre-exemples

7. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   Par les théorèmes généraux, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et $\forall x \in \,]-1,1[\,, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

   En revanche, cette série n'est pas définie pour $x = 1$ (terme général qui ne tend pas vers 0) donc f ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

8. (a) **Représentation graphique**.



   (b) Dans cette question, nous identifions les polynômes à coefficients réelles et les fonctions polynomiales associées.
   Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat

$$\boxed{P(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X] | \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}}$$

   – **Initialisation** :
   Posons $P_0 = 1$ qui est bien un polynôme...
   $\forall x > 0, \dfrac{P_0(x)}{x^{3\times 0}} e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} = f(x)$.
   Donc $P(0)$ est vrai.

   – **Hérédité** :
   Soit $n \geq \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.
   Alors, il existe et on le fixe un polynôme $P_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(x) x^{-3n+3} e^{-x^{-2}}$.
   Par dérivation de l'égalité précédente, on a
   $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P'_{n-1}(x) x^{-3n+3} e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x)(-3n+3) x^{-3n+2} e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x) x^{-3n+3} (2x^{-3}) e^{-1/x^2}$
   $= \dfrac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2} \left(x^3 P'_{n-1}(x) + (-3n+2) x^2 P_{n-1}(x) + 2P_{n-1}(x)\right)$.
   Posons $P_n = X^3 P'_{n-1} + (-3n+2) X^2 P_{n-1} + 2P_{n-1}$. Par stabilité de $\mathbb{R}[X]$ par la dérivation, le produit, la somme... P_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et il vérifie $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(x) \dfrac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.
   $P(n)$ est donc vrai.

   – **Conclusion** : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre le résultat.

   (c) Montrons par récurrence sur n le prédicat
   $\boxed{P(n) : f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f^{(n)} = 0}$.

   – **Initialisation** :
   f est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} e^u = 0$ donc par composition des limites, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.
   Donc f est continue à droite en 0.
   f est donc continue sur $[0,+\infty[$ ce qui démontre $P(0)$.

– **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.
Alors $f^{(n-1)}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
De plus, f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ donc $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
D'après la question précédente, $\forall x > 0, (f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.
Par les théorèmes de comparaison des fonctions usuelles, au voisinage de $+\infty$, $u^{3n}e^{-u^2} = o(1)$.
Or $\lim\limits_{x\to 0^+} (1/x) = +\infty$ donc par substitution, au voisinage de 0^+, $\dfrac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2} = o(1)$.
P_n est une fonction polynomiale donc continue en 0 donc bornée au voisinage de 0.
Ainsi, par théorème d'opérations, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
En résumé, $f^{(n-1)}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
Par théorème de prolongement de la classe C^1, $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $(f^{(n-1)})'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
Par définition, f est donc de classe C^n sur $[0, +\infty[$ et $f^{(n)}(0) = (f^{(n-1)})'(0) = 0$ ce qui démontre $P(n)$.

– **Conclusion** : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
f est donc de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(d) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.
D'après le théorème rappelé et la question précédente, $\forall x \in]-r, r[\,, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.
En particulier, $r/2 \in]-r, r[$ et $r/2 \neq 0$ donc $e^{-4/r^2} = 0$: absurde.
Conclusion f n'est pas développable en série entière sur aucun intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r > 0$.

9. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\forall t \geq 0, 1 + tx^2 \geq 1$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien définie et continue d'après les théorèmes généraux sur $[0, +\infty[$.
Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} = O(e^{-t})$. $t \mapsto e^{-t}$ est de signe constant et intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
Fixons a un réel strictement positif.
Posons la fonction g définie sur $[0, +\infty[\times[-a, a]$ par $g(t, x) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$.
Soit $t \geq 0$ fixé. $x \mapsto g(t, x)$ est dérivable sur $[-a, a]$ et $\forall x \in [-a, a]$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \dfrac{-2txe^{-t}}{(1+tx^2)^2}$.
De plus, $\forall x \in [-a, a]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq 2tae^{-t}$.
La fonction $t \mapsto 2tae^{-t}$ est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ en particulier car au voisinage de $+\infty$, $2ate^{-t} = o(1/t^2)$.
Pour tout $x \in [-a, a]$, les fonctions $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.
Par théorème, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x, t)\, \mathrm{d}t = f(x)$ est de classe C^1 sur $[-a, a]$ donc f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et ceci pour tout $a > 0$. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $t > 0$ fixé. Posons $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est un réel strictement positif.
Soit $x \in]-\alpha, \alpha[$. Alors $tx^2 \in [0, 1[$.
Donc $\dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} = e^{-t}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (tx^2)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^p (2p)! e^{-t}}{(2p)!} x^{2p}$.
Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$.

D'après ce qui précède, h est développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$ donc par le théorème rappelé,
$\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p)}(0) = (-1)^p (2p)! t^p e^{-t}$ et $f^{(2p+1)}(0) = 0$.

(c) D'après la question précédente et le résultat admis à la fin de la question $9(a)$, $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p+1)}(0) = \int_0^{+\infty} 0 \text{ d}t = 0$ et $f^{(2p)}(0) = \int_0^{+\infty} (-1)^p (2p)! e^{-t} t^p \text{ d}t = (-1)^p (2p)! \Gamma(p+1) = (-1)^p (2p)! p!$.

Ainsi, on peut réécrire ainsi (formellement) la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p)! p!}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p p!\, x^{2p}.$$

Soit x un réel non nul fixé.
Posons $u_p = (-1)^p p! x^{2p}$, terme général d'une suite de réels tous non nuls.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = p|x|^2$ qui tend vers $+\infty$ quand p tend vers ∞.
Donc u_p n'est pas le terme général d'une série absolument convergente.
Par caractérisation du rayon de convergence d'une série entière, celui de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est donc nul.
Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$.
Alors, par le théorème rappelé, $\forall x \in]-r,r[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ et, par caractérisation du rayon de convergence, celui de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est donc supérieur ou égal à r. Donc $0 \geq r$: absurde.
Donc f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Partie 3 : condition suffisante

10. (a) Fixons un réel $x \in]-a,a[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle $]-a,a[$.
$(0,x) \in]-a,a[^2$.
$|f^{(n+1)}| \leq M$.
Par l'inégalité de Taylor Lagrange, on obtient alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par comparaison des suites usuelles, $\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right) \to 0$ donc par théorème d'encadrement,
$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}} \to f(x)$ ce que l'on peut réécrire $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.
f est donc développable en série entière sur $]-a,a[$ donc au voisinage de 0.

(b) $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |\sin^{(n)}(x)| \leq 1$ donc $\sin$ est développable en série entière au voisinage de 0 (sur $\mathbb{R}$...) par la question précédente.