Concours Communs Polytechniques
Correction - CCP - PC Mathématiques 2
Mai 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Dans cette correction proposée, nous réécrivons les questions afin de faciliter la lecture. Il est bien entendu déconseillé d'en faire de même lors du concours. Le temps est précieux !
Il subsiste certainement quelques coquilles que vous pouvez signaler : email_math93@yahoo.fr

---

Partie I : calculs préliminaires

I.

I. 1.

I. 1. 1. Justifier l'existence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathbf{d}t$

Notons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2} \end{array} \right.$.

La fonction f est définie, positive et continue sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

- **En 0**.
  On a en utilisant un développement limité de cosinus en 0 :
  $$\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{t^2}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^3\right)\right)\right) = \frac{1}{2} + o\left(t\right)$$
  Donc
  $$\lim_{t\to 0} \ f(t) = \lim_{t\to 0} \ \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$
  La fonction $t \to \dfrac{1-\cos t}{t^2}$, est donc prolongeable par continuité en 0 sur le segment $[0\ ;\ 1]$ et, est donc intégrable sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

- **En** $+\infty$.
  On a
  $$\forall t \in [1\ ;\ +\infty[\ ,\ |f(t)| = \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1+|\cos t|}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$$
  Or $t \longmapsto \dfrac{2}{t^2}$ est intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$ d'après le critère de Riemann, donc f est aussi intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$.

- Pour conclure, **la fonction** f **est intégrable sur** $]0\ ;\ +\infty[$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale K.

$$\boxed{\text{L'intégrale } K = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

I. 1. 2. Pour tout $A > 0$, justifier l'existence de l'intégrale $D(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}$ dt.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est définie et continue sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- De plus f est prolongeable par continuité en 0. En effet :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} = \sin' 0 = 1$$

- Pour conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } A > 0, \text{ l'intégrale } D(A) = \int_0^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

I. 1. 3. Montrons que D(A) a une limite (réelle) quand A tend vers $+\infty$, égale à K.

Soient A et ϵ des réels strictement positifs avec $0 < \epsilon < A$. On considère les fonctions u et v définies sur le segment $[\epsilon; A]$ et classe C^1 sur $[\epsilon; A]$ telles que :

$$\begin{cases} u'(t) = \sin t & ; \quad u(t) = 1 - \cos t \\ v(t) = \dfrac{1}{t} & ; \quad v'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{cases} , \forall t \in [\epsilon; A]$$

Alors par le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_\epsilon^A u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_\epsilon^A - \int_\epsilon^A u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\epsilon^A + \int_\epsilon^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'égalité :

$$\int_\epsilon^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos A}{A} + \frac{\cos\epsilon - 1}{\epsilon} + \int_\epsilon^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Or :

- $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\cos\epsilon - 1}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\cos\epsilon - \cos 0}{\epsilon - 0} = \cos' 0 = -\sin 0 = 0$
- $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1-\cos A}{A} = 0$

  En effet pour tout réel A, $\left|\dfrac{1-\cos A}{A}\right| \leq \dfrac{2}{A}$ qui tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.

Pour tout $A > 0$, on a montré l'existence de l'intégrale $D(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}$ dt lors de la question I-1.2.

De plus, on a montré à la question I-1.1., l'existence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}$ dt. Donc en faisant (légitimement) tendre A vers $+\infty$ et ϵ vers 0, l'existence de l'intégrale de droite (K) dans l'égalité (1) implique celle de gauche et on obtient :

$$\boxed{\lim_{A\to+\infty} D(A) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = K.}$$

I. 2.

I. 2. 1. Justifier que l'application $L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ **est définie et continue sur** $\mathbb{R}_+$.

Nous allons appliquer le théorème dit *de continuité sous le signe intégrale*.

Théorème 1 (de continuité sous le signe intégrale)

On considère une application $F : A \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I et A sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit pour x un réel de l'intervalle A, l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$

Si :
- ❏ F est continue par rapport à la première variable ;
- ❏ F est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable ;
- ❏ F vérifie l'hypothèse de domination c'est à dire qu'il existe une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive, intégrable sur I, telle que : $\forall (x,t) \in A \times I \ , \ |F(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors :
- ❏ pour tout réel x de A, l'application $t \longmapsto F(x,t)$ est intégrable sur I ;
- ❏ l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est continue sur A.

Définissons la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-tx} \end{array} \right.$.

Alors :
- $x \longmapsto F(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$;
- $t \longmapsto F(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$;
- F vérifie l'hypothèse de dommination :
$$\forall x \geq 0 \ , \ \forall t > 0 \ , \ |F(x,t)| \leq \frac{1-\cos t}{t^2} = f(t).$$
où f est continue donc continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question I.1.1.

Le théorème *de continuité sous le signe intégrale* permet donc de conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } L : x \longmapsto L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

I. 2. 2. Montrer que, pour tout réel $a > 0$**, l'application** L **est de classe** C^2 **sur** $[a\,;\,+\infty[$ **puis qu'elle l'est sur** $[0\,;\,+\infty[$.

Soit a un réel strictement positif.

On reprend les mêmes notations, $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-tx} \end{array} \right.$.

Nous allons utiliser *le théorème de dérivation sous le signe intégrale*.

Théorème 2 (de dérivation sous le signe intégrale)

On considère une application $F : A \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I et A sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit pour x un réel de l'intervalle A, l'application $f : \left\{\begin{array}{lcl} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\, \mathrm{d}t \end{array}\right.$

Si :

- ❏ pour tout $x \in A$, $t \longmapsto F(x,t)$ est intégrable sur I ;
- ❏ $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ existe sur $A \times I$, est continue par rapport à la première variable (x) et est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable (t)
- ❏ $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination c'est à dire qu'il existe une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive, intégrable sur I, telle que :
$$\forall (x,t) \in A \times I\ ,\ \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Alors :

- ❏ pour tout réel x de A, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- ❏ l'application $f : \left\{\begin{array}{lcl} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I F(x,t)\, \mathrm{d}t \end{array}\right.$ est de classe C^1 sur A et
$$\forall x \in A,\quad f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

On vient de montrer à la question I.2.1. que la fonction L est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, on obtient facilement que pour $a > 0$, l'application $x \longmapsto F(x,t)$ est de classe C^2 sur $[a\ ;\ +\infty[$ avec :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \frac{\cos t - 1}{t}\ \mathrm{e}^{-tx} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\ \mathrm{e}^{-tx}$$

- **Montrons que L est C^1 sur $[a\ ;\ +\infty[$.**

  - pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \longmapsto F(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question I.2.1 ;
  - $x \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\cos t - 1}{t}\ \mathrm{e}^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$;
  - $t \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$;
  - $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination :
  $$\forall x \geq a > 0\ ,\ \forall t > 0\ ,\ \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1-\cos t}{t}\ \mathrm{e}^{-ta} = \varphi_a(t).$$
  où φ_a est continue par morceaux, positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

  En effet,

  – **Sur l'intervalle]0 ; 1]** .
  On a :
  $$\lim_{t\to 0} \frac{\cos 0 - \cos t}{0 - t} = \cos' 0 = -\sin 0 = 0$$

et donc

$$\lim_{t \to 0} \varphi_a(t) = 0$$

La fonction φ_a est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $]0\ ;\ 1]$;

– **Sur l'intervalle [1 ; +∞[** .
On a :

$$\forall a > 0\ ,\ \forall t > 1\ ,\ 0 \leq \varphi_a(t) = \frac{1 - \cos t}{t}\ \mathrm{e}^{-ta} \leq 2\ \mathrm{e}^{-ta}$$

Or la fonction $t \longmapsto 2\ \mathrm{e}^{-ta}$ est intégrable sur [1 ; +∞[pour tout réel $a > 0$.

Pour conclure la fonction φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale (théorème 2), la fonction L est C^1 sur $[a\ ;\ +\infty[$.

- **Montrons que** L **est** C^2 **sur** $[a\ ;\ +\infty[$.
On applique le théorème 2 à la fonction la fonction L'.

  - pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après ce qui précède ;
  - $x \longmapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = (1 - \cos t)\ \mathrm{e}^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$;
  - $t \longmapsto \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$;
  - $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ vérifie l'hypothèse de domination :
  $$\forall x \geq a > 0\ ,\ \forall t > 0\ ,\ \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|(1 - \cos t)\ \mathrm{e}^{-tx}\right| \leq 2\ \mathrm{e}^{-ta} = \psi_a(t).$$
  où ψ_a est continue par morceaux (car continue), positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale (théorème 2), la fonction L' est C^1 sur $[a\ ;\ +\infty[$. On conclut donc que pour tout $a > 0$:

$$\boxed{\text{La fonction } L : x \longmapsto L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t \text{ est } C^2 \text{ sur } [a\ ;\ +\infty[.}$$

- **Montrons que** L **est** C^2 **sur** $]0\ ;\ +\infty[$.
Soit y_0 un réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, alors en prenant $a = \dfrac{y_0}{10}$ par exemple, $y_0 \in [a\ ;\ +\infty[$ et donc L est C^2 en y_0 (avec $a > 0$).
La fonction L est donc C^2 en tout $y_0 \in [a\ ;\ +\infty[$, de ce fait :

$$\boxed{\text{La fonction } L : x \longmapsto L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t \text{ est } C^2 \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[.}$$

De plus :

$$\boxed{\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ \ L'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t}\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ \ L''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t)\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t}$$

I. 2. 3.

- **Montrons que les fonctions** $f_2 : t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ **et** $f_1 : t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t}$ **sont bornées sur** $]0\,;\,+\infty[$**.**

  – **Limites en 0**.
  Un développement limité au voisinage de 0 de la fonction cosinus nous donne facilement les limites en 0 des deux fonctions f_1 et f_2.

  $$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^3\right)$$

  et donc

  $$f_1(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2} + o\left(t^3\right)\right) = \frac{t}{2} + o\left(t\right) \tag{2}$$
  $$f_2(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^2}{2} + o\left(t^3\right)\right) = \frac{1}{2} + o\left(t\right) \tag{3}$$

  de ce fait

  $$\lim_{t\to 0} \; f_1(t) = 0 \;\text{ et }\; \lim_{t\to 0} \; f_2(t) = \frac{1}{2}$$

  – **Au voisinage de 0**.
    * Puisque la fonction f_1 tend vers 0 en 0 on peut écrire que :

    $$\forall \varepsilon > 0,\;\; \exists N_\epsilon > 0,\;\; \forall t > 0,\;\; \left(|t-0| \leq N_\varepsilon \;\; \Longrightarrow |f_1(t) - 0| \leq \varepsilon\right).$$

    et donc

    $$\forall \varepsilon > 0,\;\; \exists N_\epsilon > 0,\;\; \forall t > 0,\;\; \left(t \in]0\,;\,N_\varepsilon] \;\; \Longrightarrow |f_1(t)| \leq \varepsilon\right).$$

    En prenant $\varepsilon = 1$ par exemple, cela implique que la fonction f_1 est majorée par 1 sur l'intervalle $]0\,;\,N_1]$.
    * La fonction f_2 tend vers $\dfrac{1}{2}$ en 0 donc par un raisonnement identique :

    $$\forall \varepsilon > 0,\;\; \exists M_\epsilon > 0,\;\; \forall t > 0,\;\; \left(|t-0| \leq M_\varepsilon \;\; \Longrightarrow \left|f_2(t) - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon\right).$$

    et donc

    $$\forall \varepsilon > 0,\;\; \exists M_\epsilon > 0,\;\; \forall t > 0,\;\; \left(t \in]0\,;\,M_\varepsilon] \;\; \Longrightarrow |f_2(t)| \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\right).$$

    En prenant $\varepsilon = 1$ par exemple, cela implique que la fonction f_2 est majorée par $\dfrac{3}{2}$ sur l'intervalle $]0\,;\,M_1]$.

  – **Sur les intervalles** $[M_1;+\infty[$ **et** $[N_1;+\infty[$.

    * Sur l'intervalle $[N_1;+\infty[$ avec $N_1 > 0$, la fonction cosinus est majorée par 1 et la fonction inverse décroissante donc :

    $$\forall t \in [N_1;+\infty[\;\;,\;\; |f_1(t)| = \left|\frac{1-\cos t}{t}\right| \leq \frac{2}{N_1}.$$

$*$ De même, sur l'intervalle $[M_1; +\infty[$ avec $M_1 > 0$, la fonction cosinus est majorée par 1 et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ décroissante donc :

$$\forall t \in [M_1; +\infty[\ , \ |f_2(t)| = \left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq \frac{2}{M_1^2}.$$

– **Majoration sur** $]0\ ;\ +\infty[$.
Pour conclure,

$$\forall t \in]0\ ;\ +\infty[\ , \ |f_1(t)| = \left| \frac{1 - \cos t}{t} \right| \leq Max \left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{2}{N_1} \right) = K_1$$

et

$$\forall t \in]0\ ;\ +\infty[\ , \ |f_2(t)| = \left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq Max \left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{2}{M_1^2} \right) = K_2$$

$$\boxed{\text{Les fonctions } f_2 : t \longmapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} \text{ et } f_1 : t \longmapsto \frac{1 - \cos t}{t} \text{ sont bornées sur }]0\ ;\ +\infty[.}$$

- **Établir alors que les fonctions** $x \longmapsto |xL'(x)|$ **et** $x \longmapsto |xL(x)|$ **sont majorée sur** $\mathbb{R}_+^*$.
On a montré à la question I.2.2 que la fonction $L : x \longmapsto L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t$ est C^2 sur $]0\ ;\ +\infty[$.

– Pour $x \longmapsto |xL(x)|$.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|xL(x)| \leq x.\int_0^{+\infty} \left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right|\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t$$

or $f_2 : t \longmapsto \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$ est bornée sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive, et majorée par K_2 donc

$$|xL(x)| \leq x.\int_0^{+\infty} K_2\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t = x.K_2.\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t$$

or puisque

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-\mathrm{e}^{-tx}}{x} \right]_0^A = \frac{1}{x}$$

On a alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ |xL(x)| \leq K_2}$$

– Pour $x \longmapsto |xL(x)|$.
On a vu lors de la question I.2.2. que :

$$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, \ \ L'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t}\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t$$

donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left|xL'(x)\right| \leq x.\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos t - 1}{t} \right|\ \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t$$

De la même façon, puisque $f_1 : t \longmapsto \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$ est bornée sur $]0\ ;\ +\infty[$ et majorée par K_1 on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \left|xL'(x)\right| \leq K_1}$$

- **En déduire les limites des fonctions L et L' en $+\infty$.**
  On vient de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ |xL(x)| \leq K_2 \text{ et } \left|xL'(x)\right| \leq K_1$$

de ce fait pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$0 \leq |L(x)| \leq \frac{K_2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et

$$0 \leq \left|L'(x)\right| \leq \frac{K_1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On peut donc conclure que :

$\boxed{\text{Les fonctions } L \text{ et } L' \text{ tendent vers 0 en } +\infty.}$

I. 2. 4. Pour tout réel $x > 0$, exprimer $L''(x)$ sans utiliser d'intégrale.
On a montré lors de la question I.2.2. que la fonction L était C^2 sur $0\ ;\ +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ \ L''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t)\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t$$

par linéarité on obtient

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos t\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t$$

or on a montré à la question I.2.3 que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\right]_0^A = \frac{1}{x}$$

On a alors

$$\boxed{\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ \ L''(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t} \tag{4}$$

Or puisque $\cos t = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ et que e^{-tx} est un réel (car t et x sont réels),
on a alors

$$\forall t > 0 \ ,\ \forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ ,\cos t\, \mathrm{e}^{-tx} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-tx+\mathrm{i}t}\right)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \cos t\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \cos t\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-tx+\mathrm{i}t}\right)\, \mathrm{d}t$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos t\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\int_0^{A} \mathrm{e}^{-tx+\mathrm{i}t}\, \mathrm{d}t\right)} \tag{5}$$

Calculons donc l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\int_0^A \mathrm{e}^{-tx+\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right) &= \operatorname{Re}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{i}-x}\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}-x)}\right]_0^A\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}-x}\mathrm{e}^{A(\mathrm{i}-x)} - \frac{1}{\mathrm{i}-x}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{-x-\mathrm{i}}{x^2+1}\left(\mathrm{e}^{-Ax}\left(\cos A + \mathrm{i}\sin A\right) - 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2}\left(\mathrm{e}^{-Ax}\left(-x\cos A + \sin A\right) + x\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2}\left(\left(-x\cos A\right)\mathrm{e}^{-Ax} + \left(\sin A\right)\mathrm{e}^{-Ax} + x\right)
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}_+$

$$0 \leq \left|\left(-x\cos A\right)\mathrm{e}^{-Ax}\right| \leq x.\mathrm{e}^{-Ax} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

Cela d'après le théorème des croissances comparées puisque $x > 0$.
De plus puisque $x > 0$ on a :

$$0 \leq \left|\left(\sin A\right)\mathrm{e}^{-Ax}\right| \leq \mathrm{e}^{-Ax} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

Pour conclure pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{Re}\left(\int_0^A \mathrm{e}^{-tx+\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{1+x^2}.} \tag{6}$$

Il suffit alors de réécrire l'équation (4) :

$$\boxed{\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ \ L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.} \tag{7}$$

I. 2. 5. En déduire $L'(x)$ pour tout $x > 0$ puis $L(x)$ pour tout $x \geq 0$. Conclure que $K = \dfrac{\pi}{2}$.

On a montré lors de la question I.2.2. que la fonction L était C^2 sur $0\,;\,+\infty[$, on va donc calculer L' puis L par intégrations successives.

- **Calculons $L'(x)$.**
  On vient de montrer à la question I.2.4. que :

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ \ L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

  Par intégration on obtient L' à une constante $C \in \mathbb{R}$ près

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ \ L'(x) &= \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \\
L'(x) &= -\frac{1}{2}\ln x^{-2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \\
L'(x) &= -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{-2}\right) + C
\end{aligned}$$

  Or on a vu à la question I.2.3 que la fonction L' tend vers 0 en $+\infty$ donc puisque

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{-2}\right) = 0$$

on conclut que la constante C est nulle et de ce fait

$$\boxed{\forall x > 0 \quad L'(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + x^{-2}\right).} \tag{8}$$

- **Calculons** $L(x)$.
  On considère les fonctions u et v définies et classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\begin{cases} u'(t) = 1 & ; \quad u(t) = x \\ v(t) = L'(x) & ; \quad v'(t) = L''(x) \end{cases}$$

  Alors par le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int 1.L'(x)\,\mathrm{d}x &= \int u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [u(x)v(x)] - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[x.L'(x)\right] - \int x.L''(x)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2}\ln\left(1 + x^{-2}\right) - \int 1 - \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2}\ln\left(1 + x^{-2}\right) - x + \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

  Or on obtient facilement l'intégrale de droite à une constante réelle C_2 près

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x - \arctan x + C_2 \end{aligned}$$

  on a donc

$$\forall x > 0 \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1 + x^{-2}\right) - \arctan x + C_2$$

  Or on a vu à la question I.2.3 que la fonction L tend vers 0 en $+\infty$ donc puisque

$$x\ln\left(1 + x^{-2}\right) = x\left(x^{-2} + o\left(x^{-2}\right)\right) = x^{-1} + o\left(x^{-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{x}$$

  on a

$$\lim_{x\to+\infty} \; -\frac{x}{2}\ln\left(1 + x^{-2}\right) = 0$$

  et puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \; \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

  on conclut alors que la constante C_2 est $\frac{\pi}{2}$ et de ce fait

$$\boxed{\forall x > 0 \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1 + x^{-2}\right) - \arctan x + \frac{\pi}{2}.} \tag{9}$$

- **Calculons** $K = L(0)$.
  On a montré à la question I.2.1. que la fonction L était continue sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\lim_{x\to 0} \; L(x) = L(0) = K$$

Il reste à calculer cette limite. On a

$$\begin{aligned}\forall x > 0 \quad x \ln\left(1 + x^{-2}\right) &= x \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\\ &= x\ln\left(1+x^2\right) - x\ln\left(x^2\right)\end{aligned}$$

or le premier terme tend vers 0 quand x tend vers 0 et pour le second terme, d'après le théorème des croissances comparées

$$\text{Au voisinage de 0,} \quad |\ln x| = o\left(x^{\beta}\right) \quad \forall \beta < 0$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \quad x\ln\left(x^2\right) = \lim_{x\to 0} \quad 2x\ln(x) = 0$$

pour résumer on a

$$-\frac{x}{2}\ln\left(1+x^{-2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{10}$$

$$\arctan x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

et donc puisque

$$\forall x > 0 \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+x^{-2}\right) - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \quad L(x) = L(0) = K = \frac{\pi}{2}.}$$

On a ainsi déterminée L sur $\mathbb{R}_+$

$$\boxed{L(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+x^{-2}\right) - \arctan x + \dfrac{\pi}{2} & ,x > 0\\ \dfrac{\pi}{2} & ,x = 0\end{cases}}$$

I. 3.

I. 3. 1. Justifier que la fonction $u \longrightarrow \dfrac{\ln u}{u-1}$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1[$.

La fonction $u \longrightarrow \dfrac{\ln u}{u-1}$ est définie et continue sur $]0\ ;\ 1[$, elle est donc intégrable sur tout compact de cet intervalle.

- **Étude en 0**.
  On a l'équivalence au voisinage de 0

  $$\left|\frac{\ln u}{u-1}\right| \underset{u\to 0}{\backsim} |\ln u|$$

  or la fonction $u \longrightarrow |\ln u|$ est intégrable sur $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ donc la fonction (positive) $u \longrightarrow \dfrac{\ln u}{u-1}$ est intégrable sur $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ par théorème de comparaison de fonctions positives.
- **Étude en 1**.
  On a en reconnaissant le taux d'accroissement de la fonction $u \to \ln u$

  $$\lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u-1} = \lim_{u\to 1} \frac{\ln u - \ln 1}{u-1} = \ln' 1 = 1$$

La fonction $u \longrightarrow \left|\dfrac{\ln u}{u-1}\right|$ est donc prolongeable par continuité en 1 et est donc intégrable sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

Pour conclure, on a bien montré que

$$\boxed{\text{La fonction } u \longrightarrow \frac{\ln u}{u-1} \text{ est intégrable sur }]0\ ;\ 1[.}$$

I. 3. 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln u \, \mathbf{d}u$.

- **Existence**.
  Soit k un entier naturel, alors

$$\forall u \in]0\ ;\ 1], \forall k \in \mathbb{N} \qquad \left|u^k \ln u\right| \leq |\ln u|$$

  or la fonction $u \longrightarrow |\ln u|$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1[$, donc par théorème de comparaison de fonctions positives, la fonction (positive) $u \longrightarrow u^k \ln u$ est aussi intégrable sur $]0\ ;\ 1[$.
- **Calcul**.
  On considère les fonctions w et v définies et classe C^1 sur $]0\ ;\ 1[$ telles que :

$$\begin{cases} w'(u) = u^k & ; \quad w(u) = \dfrac{u^{k+1}}{k+1} \\ v(u) = \ln u & ; \quad v'(u) = \dfrac{1}{u} \end{cases}$$

  Alors par le théorème d'intégration par parties, pour tout $\varepsilon \in]0\ ;\ 1[$:

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 u^k \ln u \, \mathrm{d}u &= \int_\varepsilon^1 w'(u)v(u) \, \mathrm{d}u \\
&= [w(u)v(u)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 w(u)v'(u) \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \ln u\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{u^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u \\
&= -\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} \ln \varepsilon - \int_\varepsilon^1 \frac{u^k}{k+1} \, \mathrm{d}u \\
&= -\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} \ln \varepsilon - \frac{1}{k+1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_\varepsilon^1 \\
&= -\frac{1}{k+1} \left(\varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon\right) - \frac{1}{(k+1)^2} \left(1 - \varepsilon^{k+1}\right)
\end{aligned}$$

  or d'après le théorème des croissances comparées

$$\text{Au voisinage de 0,} \quad |\ln x| = o\left(x^\beta\right) \quad \forall \beta < 0$$

  donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \quad \varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon = 0$$

  de ce fait

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 u^k \ln u \, \mathrm{d}u = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 u^k \ln u \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{(k+1)^2}}$$

I. 3. 3. Grâce à un développement en série de $\dfrac{1}{1-u}$ pour $u \in]0\ ;\ 1[$ et en précisant le théorème utilisé, justifier que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

- **Développement en série.**
  Pour tout $u \in]0\ ;\ 1[$
  $$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$$
  En posant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$
  $$f_k : \left\{ \begin{array}{rcl}]0\ ;\ 1[& \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & f_k(u) = -\ln u . u^k \end{array} \right.$$
  on a donc
  $$\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(u)\,\mathrm{d}u$$
  On va donc chercher à intervertir les symboles somme et intégrale.
- **Interversion.**

Théorème 3 (d'intervertion somme et intégrale)

On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{R}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$.

Si :
- ❑ pour tout $n \in N$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- ❑ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur I ;
- ❑ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I ;
- ❑ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$ converge.

Alors :
- ❑ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ;
- ❑ $\displaystyle\int_I \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$;
- ❑ $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

On va donc chercher à appliquer ce théorème.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u \longmapsto f_n(u) = -\ln u . u^n$ sont positives continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ d'après la question I.3.2 ;
- on a convergence de la somme sur $]0\ ;\ 1[$ car
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u) = \frac{\ln u}{u-1}$$

– la fonction $u \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(u) = \frac{\ln u}{u-1}$ est continue par morceaux sur $]0\ ;\ 1[$;
– en outre toujours d'après la question I.3.2

$$\int_0^1 f_k(u)\ \mathrm{d}u = -\int_0^1 \ln u . u^k\ \mathrm{d}u = \frac{1}{(k+1)^2}$$

et de ce fait puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est positive sur $]0\ ;\ 1[$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_k(u)|\ \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(u)\ \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

qui converge comme somme de Riemann vers $\frac{\pi^2}{6}$.

On peu donc conclure d'après le théorème d'intégration terme à terme que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\ \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}}$$

Partie II : étude de quelques suites d'intégrales

II.

II. 1. Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.

Théorème 4 (de convergence dominée)

On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{R}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$.

Si :
- ❏ pour tout $n \in N$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- ❏ (f_n) converge simplement sur I vers f
- ❏ f est continue par morceaux sur I
- ❏ f_n vérifie l'hypothèse de domination c'est à dire qu'il existe une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive, intégrable sur I, telle que :
  $\forall (n, x) \in N \times I\ ,\ |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

Alors :
- ❏ $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ est integrable sur I
- ❏ f est intégrable sur I et
- ❏ $\int_I f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\ \mathrm{d}x$

II. 2.

II. 2. 1. On considère ici une application continue $f : [0\ ;\ +\infty[\longrightarrow R$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$**, on pose** $I_n = \int_0^1 f\,(t^n)\ \mathrm{d}t$**. Déterminer** $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Posons alors $g_n(t) = f\,(t^n)$
- Pour tout $n \in N$, g_n est continue par morceaux (car continue) sur $I = [0\ ;\ 1]$ comme composée de fonctions qui le sont ;

- (g_n) converge simplement sur $I = [0\ ;\ 1]$ vers g définie par

$$g \ : \ \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0\ ;\ 1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

  En effet

$$\text{si } t = 1 \quad \lim_{n\to+\infty} t^n = 1$$

  et

$$\forall t \in [0\ ;\ 1[\quad \lim_{n\to+\infty} t^n = 0$$

  et par continuité de la fonction f, la suite (g_n) converge simplement sur $I = [0\ ;\ 1]$ vers g.

- g est continue par morceaux sur $I = [0\ ;\ 1]$

- g_n **vérifie l'hypothèse de domination**.
  La fonction f étant continue sur le compact $I = [0\ ;\ 1]$, f y est bornée par une constante réel K

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0\ ;\ 1] \quad |f(x)| \leq K$$

  de ce fait puisque

$$\forall t \in [0\ ;\ 1] \quad t^n \in [0\ ;\ 1]$$

  on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0\ ;\ 1] \quad |g_n(t)| = |f(t^n)| \leq K$$

  or la fonction $\varphi \ : t \longmapsto \varphi(t) = K$ est intégrable sur $[0\ ;\ 1]$.

  Il existe donc une application $\varphi : I = [0\ ;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux (car continue), positive, intégrable sur $[0\ ;\ 1]$, telle que :

$$\forall (n,t) \in N \times [0\ ;\ 1]\ ,\ |g_n(t)| \leq \varphi(t) = K.$$

On peut donc appliquer le *théorème de convergence dominée*, (théorème 4) qui implique que :

$$\begin{cases} \square & \forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \text{ est integrable sur } [0\ ;\ 1] \\ \square & g \text{ est intégrable sur } [0\ ;\ 1] \text{ et} \\ \square & \displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

or

$$\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t = f(0)$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\ \mathrm{d}t = f(0)\ .}$$

II. 2. 2. On suppose ici de plus que $u \longrightarrow \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
On cherche donc à déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 f\left(t^n\right)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 5 (de changement de variable)

Soient $(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2, \varphi : [a\ ;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de <u>classe C^1</u> sur $[a\ ;\ b]$.
Soit f une fonction continue sur $I \supseteq \varphi\left([a\ ;\ b]\right)$.
Alors :

$$\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(u\right)\mathrm{d}u$$

On dit qu'a a effectué le **changement de variable** $u = \varphi(t)$.

Posons donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi : \left\{\begin{array}{rcl} [0\ ;\ 1] & \rightarrow & [0\ ;\ 1] \\ t & \mapsto & \varphi(t) = t^n \end{array}\right.$ qui est de classe C^1 sur $[0\ ;\ 1]$ avec

$$\varphi'(t) = nt^{n-1}$$

Soit $\varepsilon \in]0\ ;\ 1]$. on a

$$\begin{aligned} n\int_\varepsilon^1 f\left(t^n\right)\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^1 \frac{f\left(t^n\right)}{t^n} \times t\left(nt^{n-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_\varepsilon^1 \frac{f\left(\varphi(t)\right)}{t^n} \times t\left(\varphi'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_\varepsilon^1 \left(\frac{f\left(\varphi(t)\right)}{\varphi(t)} \times t\right) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

puis par application du théorème de changement de variable (théorème 5)

$$n\int_\varepsilon^1 f\left(t^n\right)\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon^n}^1 \frac{f\left(u\right)}{u} \times u^{1/n}\,\mathrm{d}u$$

or quand ε tend vers 0 le terme de gauche tend vers nI_n on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad nI_n = \int_0^1 \frac{f\left(u\right)}{u} \times u^{1/n}\,\mathrm{d}u}$$

Posons maintenant $h_n(u) = \dfrac{f\left(u\right)}{u} \times u^{1/n}$.

On va chercher à appliquer le *théorème de convergence dominée* (théorème 4).

- Pour tout $n \in N^*$, h_n est continue par morceaux sur $I =]0\ ;\ 1]$;
- La suite (h_n) converge simplement sur $I =]0\ ;\ 1]$ vers $h : u \longrightarrow \dfrac{f(u)}{u}$,
  en effet pour $u \in]0\ ;\ 1]$, la fonction $x \longmapsto u^x = \mathrm{e}^{x\ln u}$, est continue en 0

$$\forall u \in]0\ ;\ 1] \quad \lim_{n\to+\infty} u^{\frac{1}{n}} = u^0 = 1$$

et donc

$$\forall u \in]0\ ;\ 1] \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(u)}{u} \times u^{1/n} = \frac{f(u)}{u} = h(u)$$

- La fonction h est continue par morceaux (car continue) sur $I =]0\ ;\ 1]$

- h_n **vérifie l'hypothèse de domination** :
  On a :

$$\forall u \in]0\ ;\ 1], \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |h_n(u)| = \left|\frac{f(u)}{u} \times u^{1/n}\right| \leq \left|\frac{f(u)}{u}\right| = \varphi(u)$$

  or d'après les données de la question II.2.2, l'application $u \longrightarrow \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1]$.

  Donc il existe une application $\varphi :]0\ ;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive, intégrable sur $]0\ ;\ 1]$, telle que :

$$\forall (n,u) \in N^* \times]0\ ;\ 1]\ ,\ |h_n(u)| \leq \varphi(u).$$

Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que les fonctions h_n sont intégrables sur $]0\ ;\ 1]$ et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} \times u^{1/n}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

II. 2. 3. Application 1 :

Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ (grâce à une intégrale).

En posant $f : \left\{\begin{array}{rcl}]0\ ;\ 1] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \sin u \end{array}\right.$ on va vérifier que les hypothèses sont vérifiées.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\ ;\ 1]$;
- la fonction $u \longrightarrow \dfrac{f(u)}{u} = \dfrac{\sin u}{u}$ est $\underline{\text{intégrable sur }]0\ ;\ 1]}$ car continue sur $]0\ ;\ 1]$ et prolongeable par continuité en 0.
  En effet

$$\lim_{u\to0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u\to0} \frac{\sin u - \sin 0}{u - 0} = \sin' 0 = \cos 0 = 1$$

On peut donc appliquer le résultat de la question II.2.2 soit

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

or la fonction $u \longmapsto \dfrac{\sin(u)}{u}$ est strictement positive sur $]0\ ;\ 1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est non nulle et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u} = 1$$

soit

$$\boxed{\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

II. 3. On considère maintenant que $f : [0\ ;\ +\infty[\to \mathbb{R}$ est une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

II. 3. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de $A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

En posant $\varphi : \left\{\begin{array}{rcl} [1\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) = t^n \end{array}\right.$ qui est de classe C^1 sur $[1\ ;\ +\infty[$ avec

$$\varphi'(t) = nt^{n-1}$$

Soit $N > 1$. on a

$$\begin{aligned}\int_1^N f(t^n)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n}\int_1^N \frac{f(t^n)}{t^n} \times t\left(nt^{n-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\int_1^N \frac{f(\varphi(t))}{t^n} \times t\left(\varphi'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\int_1^N \left(\frac{f(\varphi(t))}{\varphi(t)} \times t\right) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

puis par application du théorème de changement de variable (théorème 5)

$$\int_1^N f(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_1^{N^n} \frac{f(u)}{u} \times u^{1/n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_1^{N^n} f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$$

on a

$$\forall u \in [1\ ;\ +\infty[, \forall n > 0 \qquad \left|f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}\right| \leq |f(u)|$$

or la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc par théorème de comparaison, la fonction $u \longmapsto f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}$ est aussi intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et de ce fait

$$\lim_{N\to+\infty} \int_1^{N^n} f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u \quad \text{existe}$$

et donc

$$\lim_{N\to+\infty} \int_1^{N^n} f(t^n)\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}u \quad \text{existe}$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } A_n = \int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$$

II. 3. 2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

On a montré à la question II.3.1 que

$$nA_n = n\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$$

On va donc chercher à appliquer le *théorème de convergence dominée* (théorème 4).

Posons $h_n(u) = f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}$.

On va chercher à appliquer le *théorème de convergence dominée* (théorème 4).

- Pour tout $n \in N^*$, h_n est continue par morceaux sur $I = [1\ ;\ +\infty[$;

- La suite (h_n) converge simplement sur $I = [1\ ;\ +\infty[$ vers $h : u \longrightarrow \dfrac{f(u)}{u}$,
en effet pour $u \in [1\ ;\ +\infty[$, la fonction $x \longmapsto u^x = \mathrm{e}^{x \ln u}$, est continue en 0

$$\forall u \in]0\ ;\ 1] \quad \lim_{n \to +\infty} u^{\frac{1}{n}} = u^0 = 1$$

et donc

$$\forall u \in]0\ ;\ 1] \quad \lim_{n \to +\infty} h_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(u)}{u} \times u^{1/n} = \frac{f(u)}{u} = h(u)$$

- La fonction h est continue par morceaux (car continue) sur $I = [1\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont ;

- h_n **vérifie l'hypothèse de domination** :
On a :

$$\forall u \in [1\ ;\ +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |h_n(u)| = \left| f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1} \right| \leq |f(u)| = \varphi(u)$$

or d'après les données de la question II.3, l'application $u \longrightarrow f(u)$ est intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Donc il existe une application $\varphi :\ [1\ ;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive, intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$, telle que :

$$\forall (n,u) \in N^* \times [1\ ;\ +\infty[\ ,\ |h_n(u)| \leq \varphi(u).$$

Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que les fonctions h_n sont intégrables sur $[1\ ;\ +\infty[$ et que

$$\lim_{n \to +\infty} nA_n = \lim_{n \to +\infty} n \int_1^{+\infty} f(t^n)\, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}\, \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\, \mathrm{d}u$$

soit

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} nA_n = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\, \mathrm{d}u}$$

II. 4.

II. 4. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, et tout $A > 1$ on pose $C_n(A) = \int_1^A \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$.
Grâce à un changement de variable et une intégration par partie, exprimer $C_n(A)$ en fonction de $\int_1^{A^n} \frac{1 - \cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}t$ et de A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} [1\ ;\ +\infty[& \to & [1\ ;\ +\infty[\\ t & \mapsto & \varphi_2(t) = t^n \end{array} \right.$ qui est de classe C^1 sur $[1\ ;\ +\infty[$ avec

$$\varphi_2'(t) = nt^{n-1}$$

Soit $A \in]1\ ;\ +\infty[$. on a

$$\begin{aligned} C_n(A) &= \int_1^A \sin(t^n)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_1^A \frac{\sin(t^n)}{t^n} \times \frac{t}{n} \left(\varphi_2'(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_1^A \left(\frac{\sin(\varphi_2(t))}{\varphi_2(t)} \times \frac{t}{n} \right) \times \varphi_2'(t)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

puis par application du théorème de changement de variable (théorème 5)

$$C_n(A) = \frac{1}{n}\int_1^{A^n} \frac{\sin(u)}{u} \times u^{1/n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_1^{A^n} \sin(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, et $A > 1$, on considère les fonctions w et v définies et classe C^1 sur $[1\ ;\ +\infty[$ telles que :

$$\begin{cases} w'(u) = \sin u & ; \quad w(u) = (1-\cos u) \\ v(u) = u^{\frac{1}{n}-1} & ; \quad v'(u) = \left(\frac{1}{n}-1\right) u^{\frac{1}{n}-2} \end{cases}$$

Alors par le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\int_1^{A^n} \sin(u) \times u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{n}\int_1^{A^n} w'(u)v(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\left[w(u)v(u)\right]_1^{A^n} - \frac{1}{n}\int_1^{A^n} w(u)v'(u)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\left[(1-\cos u)\times u^{\frac{1}{n}-1}\right]_1^{A^n} - \frac{1}{n}\int_1^{A^n} (1-\cos u) \times \left(\frac{1}{n}-1\right) u^{\frac{1}{n}-2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $A > 1$

$$\boxed{C_n(A) = \frac{1}{n}(1-\cos A^n) \times A^{1-n} - \frac{1}{n}(1-\cos 1) - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u}$$

II. 4. 2. En déduire que $C_n(A)$ a une limite quand A tend vers $+\infty$, prouvant l'existence de $\int_1^{+\infty} \sin(t^n) \times \mathbf{d}t$.

- On a pour tout $A > 1$ et $n \geq 2$ soit $n-1 \geq 1$

$$\left|(1-\cos A^n) \times A^{1-n}\right| \leq 2A^{1-n} = \frac{2}{A^{n-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

- de plus pour tout $u \geq 1$ et $n \geq 2$

$$0 \leq \left|\frac{1-\cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{2}{u^{2-\frac{1}{n}}} \leq \frac{2}{u^{\frac{3}{2}}}$$

or pour $u \geq 1$, la fonction $u \longmapsto \dfrac{2}{u^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$ par comparaison aux intégrales de Riemann (car $\frac{3}{2} > 1$).
On a donc pour $n \geq 2$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

de ce fait

$$\boxed{\text{L'intégrale } C_n(A) = \int_1^{A} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \text{ a une limite finie quand } A \text{ tend vers } +\infty.}$$

soit

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2, \text{ l'intégrale } \int_1^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

II. 4. 3. Application 2.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n \int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$ **grâce à** K **calculée en I-2.5** .

On peut grâce à la relation de Chasles écrire

$$\boxed{n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t = n\int_0^{1} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t + n\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t} \tag{13}$$

- **Pour** $n\int_0^1 \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$.

  On a d'après la question II.2.3

  $$\lim_{n \to +\infty} n\int_0^1 \sin(t^n)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(u^n)}{u}\, \mathrm{d}u$$

  Or d'après la question I.1.3

  $$D(A) = \int_0^A \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

  et l'égalité (1) de cette question I.1.3 nous donne pour tout $\varepsilon > 0, A > 0$

  $$\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{1-\cos A}{A} + \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

  On a montré alors l'existence des différents termes et que

  $$D(1) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = 1 - \cos 1 + \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

  donc on a

  $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n\int_0^1 \sin(t^n)\, \mathrm{d}t = 1 - \cos 1 + \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t} \tag{14}$$

- **Pour** $n\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$.

  On a montré lors de la question II.4.1 et II.4.2 que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $A > 1$

  $$C_n(A) = \frac{1}{n}(1-\cos A^n) \times A^{1-n} - \frac{1}{n}(1-\cos 1) - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\int_1^{A^n} \frac{1-\cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}u$$

  et

  L'intégrale $C_n(A) = \int_1^A \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$ a une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

  on a donc

  $$n\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t = \cos 1 - 1 - \left(\frac{1}{n} - 1\right)\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}u$$

  On va alors chercher à appliquer le *théorème de convergence dominée* (théorème 4) à la fonction

  $$f_n : \begin{cases} [1\,;\,+\infty[& \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad u & \mapsto \quad f_n(u) = \dfrac{1-\cos u}{u^2} \times u^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ❏ \text{ pour tout } n \in N,\ f_n \text{ est continue par morceaux sur } I = [1\,;\,+\infty[\,; \\ ❏ \text{ la suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } I = [1\,;\,+\infty[\text{ vers } f : u \longmapsto \dfrac{1-\cos u}{u^2} \\ ❏ \ f \text{ est continue par morceaux (car continue) sur } I = [1\,;\,+\infty[\\ ❏ \ f_n \text{ vérifie l'}\textbf{hypothèse de domination} : \end{array}\right.$$

Pour tout $n \geq 2$ et $u \geq 1$

$$|f_n(u)| = \left|\frac{1-\cos u}{u^{2-\frac{1}{n}}}\right| \leq \frac{2}{u^{\frac{3}{2}}} = \varphi(u)$$

or la fonction $u \longmapsto \dfrac{2}{u^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $I = [1\ ;\ +\infty[$.

Donc il existe une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive, intégrable sur I, telle que :

$$\forall (n,u) \in N \times I\ ,\ |f_n(u)| \leq \varphi(u).$$

On peut donc appliquer le *théorème de convergence dominée* (théorème 4) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} \sin\left(t^n\right) \mathrm{d}t = \cos 1 - 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t} \tag{15}$$

Et donc en remplaçant les égalités (14) et (15) dans la relation (13)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} \sin\left(t^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = K = \frac{\pi}{2}} \tag{16}$$

Partie III : étude de séries de fonctions

III.

III. 1. Un premier exemple.

III. 1. 1. Pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$, calculer $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

- On a pour tout entier $N > 0$ la somme des N premiers termes d'une série géométrique

$$\sum_{n=1}^{N} x^n = x\frac{1-x^N}{1-x}$$

- Et donc par passage à la limite puisque $x \in]-1\ ;\ 1[$

$$\boxed{\forall x \in]-1\ ;\ 1[\quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.} \tag{17}$$

- La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, de rayon de convergence 1, est C^∞ sur $]-1\ ;\ 1[$ et la série entière dérivée a même rayon de convergence donc

$$\boxed{\forall x \in]-1\ ;\ 1[\quad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.} \tag{18}$$

III. 1. 2. Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} F(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)F(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)F'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (1-x)^2F'(x)$.

- On a facilement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{1-x} = +\infty}$$

- Pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $\quad (1-x)F(x) = x$ donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)F(x) = 1}$$

- Pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $(1-x)F'(x) = \dfrac{1}{1-x}$ donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)F'(x) = +\infty}$$

- Pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $\quad (1-x)^2F'(x) = 1$ donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^2F'(x) = 1}$$

III. 2. Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, on pose cette fois : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$

III. 2. 1. Soit $a \in]-1\,;\,1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a, a]$. En déduire que F est définie et continue sur $]-1\,;\,1[$.

Convergence normale de cette série de fonctions

Notons

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1\,;\,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n} \end{array} \right.$$

alors on a pour tout $a \in]0\,;\,1[$ et $n \geq 1$

$$\forall x \in [-a, a] \quad |f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \leq \left| \frac{a^n}{1-a} \right|$$

or pour $a \in]0\,;\,1[$, la série $\dfrac{1}{1-a}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ converge et donc

$$\boxed{\text{La série } F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \text{ converge normalement sur } [-a,a], |a|<1.}$$

Continuité.

- Pour tout entier $n > 0$, les fonctions $x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}$ sont continues sur $]-1\,;\,1[$;
- La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement sur tout compact de $]-1\,;\,1[$.

Donc par théorème,

$$\boxed{\text{La fonction } F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \text{ est définie et continue sur }]-1\ ;\ 1[}.$$

III. 2. 2.

- **Montrer que, pour tout** $x \in]0\ ;\ 1[$ **et tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **on a** $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leq n$.

  Pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k \leq \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = n$$

  soit

$$\boxed{\forall x \in]0\ ;\ 1[, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1-x^n}{1-x} \leq n} \tag{19}$$

- **En déduire** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x)$.

  Pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{x^n}{1-x^n} \geq x^n$$

  donc en passant à la somme

$$\forall x \in]0\ ;\ 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

  or on a vu à la question III.1.2 que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = +\infty$$

  donc par comparaison

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = +\infty} \tag{20}$$

- **Puis** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)F(x)$.

  On a pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$

$$(1-x)F(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x}{1-x^n} \times x^n$$

  or d'après l'inégalité (19) prouvée à la question III.2.2

$$\forall x \in]0\ ;\ 1[, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1-x^n}{1-x} \leq n$$

  donc

$$(1-x)F(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

or

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\ln(1-x) = +\infty$$

donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)F(x) = +\infty} \tag{21}$$

III. 3. Dans cette question, f **est une application réelle continue et croissante sur** $[0\,;\,1[$ **avec** $f(0)=0$ **et telle que** $u:\ \longmapsto \dfrac{f(u)}{u}$ **soit intégrable sur** $]0\,;\,1[$.
Soit $x\in]0\,;\,1[$.

III. 3. 1. Justifier l'existence de $G(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t$ **et l'égalité** $G(x)=-\dfrac{1}{\ln x}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

Pour $x\in]0\,;\,1[$, $\varepsilon>0$ et $B>\varepsilon$.

Posons donc ,

$$\varphi:\left\{\begin{array}{rcl}[\varepsilon\,;\,B] & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \varphi(t)=x^t=\mathrm{e}^{t\ln x}\end{array}\right.$$

qui est de classe C^1 sur $[\varepsilon\,;\,B]$ avec

$$\varphi'(t)=\ln x\times \mathrm{e}^{t\ln x}=\ln x\varphi(t)$$

on a pour $x\in]0\,;\,1[$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^B f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^B \frac{f\left(x^t\right)}{\ln x\varphi(t)}\times\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\ln x}\int_\varepsilon^B \left(\frac{f\left(\varphi(t)\right)}{\varphi(t)}\right)\times\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

puis par application du théorème de changement de variable (théorème 5)

$$\int_\varepsilon^B f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln x}\int_{x^\varepsilon}^{x^B}\frac{f\left(u\right)}{u}\,\mathrm{d}u$$

or puisque $x\in]0\,;\,1[$ on a $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} x^B=0$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} x^\varepsilon=1$ et puisque d'après les données de cette question, f est une application telle que $u:\ \longmapsto\dfrac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0\,;\,1[$, on a

$$\boxed{G(x)=\int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t \text{ existe et }\quad G(x)=-\frac{1}{\ln x}\int_0^1\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u} \tag{22}$$

III. 3. 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$**, justifier l'encadrement** :

$$\boldsymbol{\int_n^{n+1} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t \leq f\left(x^n\right)\leq \int_{n-1}^n f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in]0\,;\,1[$ et $t\in[n\,;\,n+1]$

$$x^{n+1}\leq x^t\leq x^n$$

et puisque la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ 1[$

$$f\left(x^{n+1}\right) \leq f\left(x^{t}\right) \leq f\left(x^{n}\right)$$

et en intégrant entre n et $n+1$

$$f\left(x^{n+1}\right) \leq \int_{n}^{n+1} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t \leq f\left(x^{n}\right)$$

et donc si $t \in [n-1\ ;\ n]$, on obtient facilement de la même façon

$$f\left(x^{n}\right) \leq \int_{n-1}^{n} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t \leq f\left(x^{n-1}\right)$$

soit pour conclure

$$\boxed{\int_{n}^{n+1} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t \leq f\left(x^{n}\right) \leq \int_{n-1}^{n} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t}$$

III. 3. 3. En déduire l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f\left(x^{n}\right)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

La fonction f est croissante avec $f(0) = 0$ donc elle est positive sur $[0\ ;\ 1[$. Pour $x \in]0\ ;\ 1[$, pour tout entier $n \geq 1$ on a $x^{n} \in]0\ ;\ 1[$ et donc en sommant pour n de 1 à N dans l'inégalité de la question III.3.2

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} f\left(x^{n}\right) \leq \int_{0}^{N} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

On a justifié l'existence de $G(x)$ à la question III.3.1 ainsi que l'égalité

$$G(x) = \int_{0}^{+\infty} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t \ = -\frac{1}{\ln x}\int_{0}^{1} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

et puisque f est positive

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} f\left(x^{n}\right) \leq \int_{0}^{N} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_{0}^{+\infty} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

La suite $S_N = \sum_{n=1}^{N} f\left(x^{n}\right)$ est donc croissante (f est positive) et majorée donc convergente donc

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f\left(x^{n}\right) \text{ existe}}$$

De même en sommant pour n de 1 à N dans la première inégalité de la question III.3.2

$$\int_{n}^{n+1} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t \leq f\left(x^{n}\right)$$

on a

$$\int_{1}^{N+1} f\left(x^{t}\right)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} f\left(x^{n}\right)$$

puis en faisant (légitimement) tendre N vers $+\infty$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f\left(x^n\right) = F(x) \leq \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t} \tag{23}$$

III. 3. 4. Conclure avec soin que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x)F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

En utilisant le résultat de la question III.3.2

$$G(x) = \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t \;= -\frac{1}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

on peut réécrire l'inégalité (23) de la question III.3.3

$$G(x) - \int_0^1 f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t = G(x) \tag{24}$$

et donc en multipliant par $(1-x) > 0$ car $x \in]0\,;\,1[$

$$\boxed{(1-x)\left(G(x) - \int_0^1 f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t\right) \leq (1-x)F(x) \leq (1-x)G(x)} \tag{25}$$

or

- **Calculons** $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x)G(x)$
  D'après la question III.3.1

  $$(1-x)G(x) = -\frac{1-x}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

  or

  $$\frac{\ln x}{1-x} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} \ln' 1 = 1$$

  donc

  $$(1-x)G(x) = -\frac{1-x}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x \to 1]{} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

  et

  $$\boxed{\lim_{x \to 1^-} (1-x)G(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

- **Calculons la limite du premier terme de l'inégalité (25)**.
  En effectuant le changement de variable $\varphi(t) = x^t$ comme lors de la question III.3.1, on obtient

  $$(1-x)\int_0^1 f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{x-1}{\ln x}\int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

  or on a vu que

  $$\frac{\ln x}{1-x} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} \ln' 1 = 1$$

  et de plus, l'intégrale étant continue comme fonction d'une de ses bornes on a

  $$\int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$$

pour conclure

$$\lim_{x\to 1^-}\ (1-x)\int_0^1 f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t = 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\ (1-x)\left(G(x)-\int_0^1 f\left(x^t\right)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

- **Bilan**.
  Dans l'inégalité (25) du début de cette question, les deux termes encadrant $(1-x)F(x)$ tendent vers la même limite quand x tend vers 1^-, donc par théorème d'encadrement (ou *des gendarmes*) :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\ (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

III. 4. Un dernier exemple.

Pour tout $x\in]-1\ ;\ 1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-x^n\right)$.

III. 4. 1. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $]-1\ ;\ 1[$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une série de fonctions.

Posons pour $x\in]-1\ ;\ 1[$, $f_n(x) = -\ln\left(1-x^n\right)$.
On va chercher à appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme.

> **Théorème 6** (de dérivation sous le signe somme)
>
> On considère une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{R}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$.
>
> Si :
> - ❏ pour tout $n\in N$, f_n est de classe C^1 sur I ;
> - ❏ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur I ;
> - ❏ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I ;
>
> Alors :
> - ❏ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
> - ❏ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I ;
> - ❏ $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$;

- Pour tout $n\in N$, f_n est de classe C^1 sur $I =]-1\ ;\ 1[$ avec

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}$$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur I ;

$$\forall a\in]0\ ;\ 1[,\ \ \forall x\in [-a\ ;\ a]\qquad |f_n(x)| = |-\ln\left(1-x^n\right)| \leq \ln\left(1+a^n\right)\leq a^n$$

en effet

$$\forall y > 0 \quad \ln(1+y) \leq y$$

or $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge pour $|a| < 1$ donc par comparaison de séries positives, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur I.

Remarque : On a aussi pour tout $a \in]0\ ;\ 1[$, $\ln(1+a^n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} a^n$

- Pour $a \in]0\ ;\ 1[$ on a

$$\forall x \in [-a\ ;\ a] \quad |f_n'(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{1-a^n} \leq \frac{na^{n-1}}{1-a}$$

or la série $\sum na^{n-1}$ converge pour $a \in]0\ ;\ 1[$ car c'est la série dérivée de la série entier $\sum a^n$ qui est $C^{+\infty}$ dans son disque de convergence de rayon 1. La série dérivée a en outre même rayon de convergence.

Il y a donc convergence uniforme (car normale) de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ sur tout segment de I.

Le théorème 6 s'applique donc et de ce fait

$$\boxed{F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n) \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur }]-1\ ;\ 1[}$$

$$\boxed{\text{et } \forall x \in]-1\ ;\ 1[\quad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}}$$

III. 4. 2. Grâce au III.3.4, montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\, du$ étudiée en I.3.

Posons pour $x \in [0\ ;\ 1[$, $f(x) = -\ln(1-x)$.
Prouvons que les données nécessaires à l'application de la partie III.3 sont vérifiées.

- La fonction f est réelle , continue et croissante sur $[0\ ;\ 1[$.
  En effet f est dérivable comme composée de fonctions qui le sont et

$$x \in [0\ ;\ 1[\quad f'(x) = \frac{1}{1-x} \geq 0$$

  Donc f est croissante sur $[0\ ;\ 1[$
- L'application $u \longmapsto \frac{f(u)}{u} = \frac{-\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0\ ;\ 1[$ d'après la question I.3.1 et de plus

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, du$$

Les données nécessaires à l'application de la partie III.3 sont vérifiées donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\, du}$$