Partie I
Étude d'une fonction et de sa limite

I.1 Étude de la fonction f

I.1.1 *La fonction* $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc* $f : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$ *est la primitive de* g *qui s'annule en* 0 *:*

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on obtient en utilisant la parité de* g *et* $u = -t$ *:*

$$f(-x) = \int_0^{-x} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{x} \mathrm{e}^{-u^2}(-\mathrm{d}u) = -f(x).$$

Donc f *est une fonction impaire.*

I.1.2 $f' = g$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *donc* f *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$*.*
On note $\mathcal{P}(n)$*, la propriété suivante : « il existe une fonction polynôme* p_n*, de degré* n*, telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2)$ *».*
On pose $p_1 : x \mapsto -2x$*, c'est une fonction polynôme de degré* 1 *et pour tout réel* x *:* $f'(x) = -2x\exp(-x^2)$*.* $\mathcal{P}(1)$ *est vraie.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. On suppose* $\mathcal{P}(n)$ *vraie. On obtient alors pour tout* x *:*

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)\prime}(x) = [p_n'(x) - 2xp_n(x)]\exp(-x^2).$$

En notant $p_{n+1} : x \mapsto p_n'(x) - 2xp_n(x)$ *on a bien une fonction polynôme de degré* $n+1$ *donc* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*
Par récurrence, on a montré que $\mathcal{P}(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

I.1.3 f *est impaire et en dérivant* n *fois la relation «* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$ *» on obtient «* $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}f^{(n)}(-x)$ *»*
p_n *est paire (respectivement impaire) quand* n *est impair (respectivement pair).*

I.1.4 *La fonction* $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ *est continue positive sur* $\mathbb{R}$ *.*
Pour $t \geqslant 1$*,* $t \leqslant t^2$ *donc* $0 \leqslant \exp(-t^2) \leqslant \exp(-t)$*, or* $t \mapsto \exp(-t)$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *donc par comparaison* g *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *.*
Donc $g = f'$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *donc* f *admet une limite finie en* $+\infty$*.*

I.2 Développpement en série de f

I.2.1 *D'après la définition de l'exponentielle :*

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\mathrm{d}t$$

Puisque $\displaystyle\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$*, il suffit de justifier l'interversion série-intégrale pour obtenir le résultat voulu :*
pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Justification de l'interversion :
x est un réel fixé. On note S le segment $[0, x]$ si x est positif et $[x, 0]$ sinon ; les fonctions $u_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}$ sont continues sur S (donc intégrables sur S), $\sum u_n$ converge simplement sur S et la somme est $t \mapsto \exp(-t^2)$ qui est continue sur S.

par la convergence normale : $||u_n||_{\infty,S} \leqslant \frac{|x|^{2n}}{n!}$ *et la série numérique* $\sum \frac{|x|^{2n}}{n!}$ *est convergente (sa somme est* $\exp(|x|^2)$*) donc la série de fonctions converge normalement sur le segment* S *: le théorème d'intégration terme à terme des séries fonctions continues sur le segment* S *s'applique ;*

par le théorème général : $\displaystyle\int_S |u_n(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{|x|^{2n}}{n!} \times |x|$ *et la série numérique* $\sum \frac{|x|^{2n}}{n!}|x|$ *est convergente donc la série numérique* $\sum \int_S |u_n(t)|\mathrm{d}t$ *converge : le théorème d'intégration terme à terme des séries fonctions intégrables sur l'intervalle* S *s'applique.*

I.2.2 D'une part en utilisant I.1.2 en $x = 0$*, on a* $p_n(0) = f^{(n)}(0)$.
D'autre part le développement précédent montre que f *est développable en série entière au voisinage de* 0 *(avec un rayon de convergence infini) donc* f *coïncide avec la somme de sa série de Taylor* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$*. Par unicité du développement en série entière, on obtient :*

$$p_{2n}(0) = 0 \text{ et } p_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

I.3 Calcul de Δ

I.3.1 On peut étudier la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u - 1 - u$ *ou utiliser la convexité de* $\exp$ *: la courbe est au dessus de la tangente en* $u = 0$ *qui a pour équation* $y = \exp(0) + \exp'(0)(u - 0) = 1 + u$ *donc*

$$\text{pour tout réel } u, \text{ on a } \mathrm{e}^u \geq 1 + u.$$

I.3.2 Soit n *un entier naturel non nul.*
D'après la relation précédente en $-u$ *on a pour* $u \leqslant 1$ *:* $0 \leqslant 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u}$*, on élève ensuite à la puissance* n *:* $(1 - u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu}$ *si* $u \leqslant 1$.
D'après la relation précédente en u *on a pour* $u > -1$ *:* $0 < 1 + u \leqslant \mathrm{e}^u$*, on élève ensuite à la puissance* $-n$ *:* $\mathrm{e}^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n}$ *si* $u > -1$.

I.3.3 Soit n *un entier naturel non nul.*
Pour $x \in [0, 1]$*, on a* $u = x^2 > -1$ *donc* $(1 - x^2)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2}$ *donc en intégrant sur* $[0, 1]$ *:* $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x$ *puis* $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x$ *(car* $\exp(-nx^2) \geqslant 0$*).*
Par ailleurs la seconde relation du I.3.3. donne pour $x \geqslant 0$*,* $\mathrm{e}^{-nx^2} \leqslant \dfrac{1}{(1 + x^2)^n}$ *relation que l'on peut intégrer car l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n}$ *converge (par comparaison à* $\frac{1}{x^2}$ *pour la borne* $+\infty$*). D'où finalement :*

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n}.$$

I.3.4 En utilisant le changement de variable $x = \sin\theta$ *(*$\theta \mapsto \sin\theta$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, \pi/2]$*) :*
$\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^n \cos\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta = W_{2n+1}$ *;*
avec $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}u$ *(changement affine) :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \,\mathrm{d}u = \frac{\Delta}{\sqrt{n}}$ *;*

et avec $x=\tan\theta$ *(de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,\pi/2[$*, bijectif de* $[0,\pi/2[$ *sur* $[0,+\infty[$*),* $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^n\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=W_{2n-2}$.
La relation du I.3.3 sécrit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *:*

$$W_{2n+1}\leq\frac{\Delta}{\sqrt{n}}\leq W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$*, on obtient* $W_{2n+1}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ *donc* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *et de même pour* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_{2n-2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *donc par passage à la limite* $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\leqslant\Delta\leqslant\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ *d'où la valeur de l'intégrale de Gauss :*

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\Delta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Partie II
Étude de deux fonctions

II.1 Étude de la fonction h

II.1.1 *Soit* b *un réel.* $t\mapsto\cos(2bt)\exp(-t^2)$ *est continue sur* $[0,+\infty[$ *et pour tout* $t\in[0,+\infty[$, $|\cos(2bt)\exp(-t^2)|\leqslant\exp(-t^2)$*. On a vu que* $t\mapsto\exp(-t^2)$ *était intégrable sur* $[0,+\infty[$ *donc* $t\mapsto\cos(2bt)\exp(-t^2)$ *est intégrable* $[0,+\infty[$ *d'où l'existence de l'intégrale :*

$$h(b)=\int_0^{+\infty}\cos(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

II.1.2 *Notons* $P(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\cos(2xy)$ *et* $Q(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\sin(2xy)$*. Pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*
$\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=+2y\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\cos(2xy)-2x\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\sin(2xy)$ *et*
$\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\sin(2xy)+2y\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\cos(2xy)$ *donc* $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ *:*
La forme différentielle ω *est fermée sur* $\mathbb{R}^2$ *donc elle est exacte sur l'ouvert convexe* $\mathbb{R}^2$.

II.1.3 *L'intégrale curviligne* $\displaystyle\int_\gamma\omega$ *est nulle car* ω *est exacte.*

II.1.4 γ *est la réunion de quatre segments :* $\displaystyle\int_\gamma\omega=I_1+I_2+I_3+I_4$ *avec :*

$\displaystyle I_1=\int_{x=0}^{x=a}\mathrm{e}^{-(x^2-0^2)}\cos(0)\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{x=a}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\underset{a\to+\infty}{\to}\Delta$ *;*

$\displaystyle I_2=\int_{y=0}^{y=b}\mathrm{e}^{-(a^2-y^2)}\sin(2ay)\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-a^2}\int_{y=0}^{y=b}\mathrm{e}^{y^2}\sin(2ay)\,\mathrm{d}y\underset{a\to+\infty}{\to}0$ *(car l'intégrale est bornée par rapport à* a*) ;*

$\displaystyle I_3=\int_{x=a}^{x=0}\mathrm{e}^{-(x^2-b^2)}\cos(2bx)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{b^2}\int_{x=0}^{x=a}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\,\mathrm{d}x\underset{a\to+\infty}{\to}-\mathrm{e}^{b^2}h(b)$ *;*

$$I_4 = \int_{y=b}^{y=0} \mathrm{e}^{-(0^2-y^2)} \sin(0)\,\mathrm{d}y = 0 \ .$$

En passant à la limite quand $a \to +\infty$ dans la relation $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ on obtient

$$\Delta + 0 - \mathrm{e}^{b^2} h(b) = 0 \text{ donc } h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-b^2}.$$

II.2 **Étude de la fonction** φ

II.2.1 Pour $t > 0$ fixé, $x \mapsto \mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue $\mathbb{R}$.
Pour x fixé, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue positive sur $]\,0, +\infty\,[$.
De plus pour tout $t > 0$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$ ce qui montre que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty\,[$ et directement par domination :

$\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$ *est continue sur $\mathbb{R}$ et est paire (évident).*

II.2.2 $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}) = -\dfrac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}$.
pour $t > 0$ fixé, $x \mapsto -\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto -\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}$ est continue sur $]\,0, +\infty\,[$
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ pour $x \in [a, b]$ on a

$$\forall t > 0, \quad 0 \leqslant \left|-\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}\right| \leqslant \frac{2b}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-a^2/t^2}.$$

On montre que $t \mapsto \frac{2b}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-a^2/t^2}$ est intégrable sur $]\,0, +\infty\,[$: elle est continue positive sur $]\,0, +\infty\,[$, prolongeable par continuité en $t = 0$ (limite nulle par croissance comparée) et dominée pour $t \geqslant 1$ par $2b\mathrm{e}^{-t^2}$...
φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$.
Ceci étant valable sur tout segment de $]\,0, +\infty\,[$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0, +\infty\,[$.

II.2.3 Pour $x > 0$, $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}\mathrm{d}t$, on pose $u = x/t$. Avec $\mathrm{d}u = -\frac{x}{t^2}\mathrm{d}t$ on obtient :
$\varphi'(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/u^2-u^2}\mathrm{d}u = -2\varphi(x)$

II.2.4 $\varphi(x) = K\exp(-2x)$ pour $x > 0$. Or φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $K = \lim\limits_{0^+} \varphi = \varphi(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Puis, par parité, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-2|x|)$.

Partie III
Calcul d'une intégrale

III.1 Étude de la fonction ψ

III.1.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{|\cos(2xt)|}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ or $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2} = \arctan'(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty\,[$, on montrerait alors à l'aide du théorème de continuité que

$$x \mapsto \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

définit une fonction ψ continue sur $\mathbb{R}$ qui par ailleurs est clairement paire.

III.1.2 $\psi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \arctan(b) - 0 = \frac{\pi}{2}.$

III.2 On peut voir $j_p(x)$ comme une intégrale à paramètre mais en fait elle se calcule :

$$j_p(x) = \int_0^p y\exp(-(1+x^2)y^2)\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{\exp(-(1+x^2)y^2)}{2(1+x^2)}\right]_{y=0}^{y=p} = \frac{1-\exp(-(1+x^2)p^2)}{2(1+x^2)}$$

Sous cette forme il est clair que j_p est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour x fixé $\lim\limits_{p\to+\infty} j_p(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

III.3 $k_n(y) = \displaystyle\int_0^n y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = y\int_0^n \exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$ *:*

Continuité sous le signe intégrale : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

Pour x fixé, $y \mapsto y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$;

pour $y \geqslant 0$, $x \mapsto y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)$ est continue sur $[0,n]$ donc intégrable sur ce segment ;

soit $[0,\beta]$ un segment de $\mathbb{R}^+$, on a pour $y \in [0,\beta]$ la domination $|y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)| \leqslant \beta$ ce qui est intégrable sur le segment $[0,n]$:

$(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

Pour la convergence simple on distingue $y=0$, $k_n(0) = 0 \to 0$ et sinon

$y > 0$, $x \mapsto \exp(-y^2x^2)\cos(2ax)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc

$k_n(y) \underset{n\to+\infty}{\to} \displaystyle\int_0^{+\infty} y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$ *et en posant $u = xy$:*

$$\int_0^{+\infty} y\exp(-u^2)\cos(2\frac{a}{y}u)\,\frac{1}{y}\mathrm{d}u = h(a/y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/y^2).$$

$(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa limite simple est la fonction $y \mapsto \begin{cases} h(a/y) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y = 0 \end{cases}$.

III.4 Soit $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1
- *$x \mapsto j_p(x)\cos(2ax)$ est continue sur $[0,n]$;*
- *la suite de fonction (j_p) converge simplement sur $[0,n]$ et sa limite simple est continue sur $[0,n]$;*
- *domination : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $x \in [0,n]$, $|j_p(x)\cos(2ax)| \leqslant \frac{1}{2(1+x^2)} \leqslant 1$, or la fonction dominante est intégrable sur $[0,n]$*

donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} = \int_0^n \frac{1}{2(1+x^2)}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x.$$

III.4.2 $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = \int_0^n \left(\int_0^p y\exp(-(1+x^2)y^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$

Or $(x,y) \mapsto y\exp(-(1+x^2)y^2)\cos(2ax)$ est continue sur le pavé $[0,n]\times[0,p]$ donc par le théorème de Fubini :

$$u_{n,p} = \int_0^p \left(\int_0^n y\exp(-(1+x^2)y^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^p k_n(y)\exp(-y^2)\,\mathrm{d}y.$$

III.5 La fonction $y \mapsto k_n(y)\exp(-y^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour $y \geqslant 0$,
$|k_n(y)\exp(-y^2)| \leqslant y\cdot 1\cdot 1\cdot\exp(-y^2)$ ce qui montre l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$.

III.6 D'après III.4 et III.5, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} k_n(y)\exp(-y^2)\,\mathrm{d}y$$

On passe maintenant à la limite quand $n \to +\infty$ à nouveau avec le théorème de convergence dominée, on pose $f_n(y) = k_n(y)\exp(-y^2)$

- *l'intégrabilité des f_n a été vue au III.5 ;*
- *la convergence simple se déduit de III.3 : (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa limite simple est la fonction $y \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/y^2 - y^2) & si \quad y > 0 \\ 0 & si \quad y = 0 \end{cases}$.*
- *domination : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $y \geqslant 0$, on a $0 \leqslant |f_n(y)| \leqslant \exp(-y^2)\displaystyle\int_0^n y\exp(-y^2x^2)\mathrm{d}x$*

  $$0 \leqslant |f_n(y)| \leqslant \exp(-y^2)\int_0^{+\infty} y\exp(-y^2x^2)\,\mathrm{d}x = \exp(-y^2)\int_0^{+\infty}\exp(-u^2)\,\mathrm{d}u = \exp(-y^2)\Delta$$

  et la fonction dominante $y \mapsto \Delta\exp(-y^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

on obtient ainsi :

$$\psi(a) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/y^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\,\varphi(a)$$

soit en d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \psi(x) = \sqrt{\pi}\,\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\exp(-2|x|)$$