CCP PSI 2
un corrigé

I. Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.1.1 Pour que q_A soit bornée et atteigne ses bornes sur Ω_n, il suffit que q_A soit continue (ce qui est vrai par théorèmes d'opérations puisque $q_A(x) = \sum_{1\le j,k\le n} a_{j,k}x_jx_k$) et que Ω_n soit compact (fermé borné en dimension finie ; le caractère borné est immédiat et le caractère fermé provient de la caractérisation séquentielle des fermés avec la continuité de la norme par exemple).

I.1.2 Soit λ une valeur propre réelle de A. Il existe alors x non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Posons $y = \frac{x}{\|x\|}$; c'est un élément de Ω_n et $q_A(y) = \frac{1}{\|x\|^2}(Ax|x) = \frac{1}{\|x\|^2}(\lambda x|x) = \lambda$. Ainsi $\lambda \in q_A(\Omega_n) = [m_A, M_A]$ et on a montré que

$$\mathbb{R}\cap \mathrm{Sp}(A) \subset [m_A, M_A]$$

I.1.3 A étant triangulaire, on lit les valeurs propres sur la diagonale :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$$

Par ailleurs $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$ et

$$\forall \theta\in\mathbb{R},\ q(\cos(\theta), \sin(\theta)) = 2 - \cos(\theta)\sin(\theta) = 2 - \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Comme $\sin(2\theta)$ décrit $[-1, 1]$ quand θ parcourt $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$q_A(\Omega_2) = [3/2, 5/2]$$

I.2.1 Si y est non nul, on peut poser $x = y/\|y\|$ et remarquer que puisque $x \in\ \Omega_n$, $q_A(y) = \|y\|^2q_A(x) = 0$. Comme $q_A(y) = 0$ de manière directe on a montré que

$$\forall y\in\mathbb{R}^n,\ q_A(y) = 0$$

I.2.2 Par bilinéarité du produit scalaire, $q_A(y + z) = q_A(y) + q_A(z) + (Ay|z) + (Az|y)$. Avec la question précédente, on a donc

$$0 = q_A(y + z) = (Ay|z) + (Az|y)$$

I.2.3 De façon générale, $(Ay|z) = \sum_{1\le j,k\le n} z_ja_{j,k}y_k$. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}$', on a donc $(Ae_u|e_v) = a_{v,u}$ (ce que l'on peut aussi voir en disant que $(Ae_u|e_v)$ est la v-ième coordonnée de Ae_u puisque la base canonique est orthonormée). Avec la question précédente, on a donc

$$\forall (u, v) \in [1, n],\ a_{u,v} + a_{v,u} = 0$$

et A est donc antisymétrique.

I.3 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Si $A = (0)$ il est immédiat que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_A(x) = 0$ (et c'est a fortiori vrai sur Ω_n).
Réciproquement, si q_A est nulle sur Ω_n, on vient de voir que A est antisymétrique. Comme elle est aussi symétrique, elle est nulle ($-{}^tA = A = {}^tA$ et donc $A = 0$).

I.4 On a quatre propriétés à vérifier.
- N est bien définie ($N(A)$ est même un maximum) et est positive (borne supérieure de quantités qui le sont).
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. On a alors $\forall x \in \Omega_n,\ 0 \le |q_A(x)| \le N(A) = 0$ et q_A est nulle sur Ω_n. D'après la question précédente, $A = 0$. Ceci nous donne l'axiome de séparation.

- Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;

$$\forall x \in \ \Omega_n,\ |q_{A+B}(x)| = |q_A(x) + q_B(x)| \leq |q_A(x)| + |q_B(x)| \leq N(A) + N(B)$$

en passant à la borne supérieure, on trouve $N(A+B) \leq N(A)+N(B)$ ce qui donne l'inégalité triangulaire.
- Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \ \mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \Omega_n,\ |q_{\lambda A}(x)| = |\lambda|.|q_A(x)| \leq |\lambda| N(A)$$

et en passant à la borne supérieure, on trouve $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$.
Si $\lambda = 0$, l'égalité est vraie. Sinon, on en déduit que

$$N(A) = N(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$$

et on a encore l'égalité $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$ ce qui donne l'homogénéité.

Remarque : on a besoin de la symétrie des matrices uniquement pour l'axiome de séparation.

I.5.1 Le calcul est immédiat

$$\forall k,\ q_A(e_k) = (Ae_k|e_k) = \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k$$

I.5.2 Les formules proposées correspondent à celles de calcul en base orthonormée ! On les retrouve en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\forall x \in \Omega_n,\ 1 = \|x\|^2 = \sum_{1 \leq j,k \leq n} x'_j x'_k (e_j|e_k) = \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2$$

On a aussi

$$q_A(x) = (Ax|x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x'_k e_k | \sum_{k=1}^{n} x'_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x'_k)^2$$

I.5.3 En gardant les notations de la question précédente, on a donc

$$\lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 (x'_k)^2 \leq q_A(x) \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_n (x'_k)^2 = \lambda_n$$

Le minorant est atteint pour $x = e_1 \in \Omega_n$ et le majorant pour $x = e_n \in \Omega_n$. Ce sont donc des minimum et maximum :

$$m_A = \min \mathrm{Sp}(A) = \lambda_1 \ \text{ et } \ M_A = \max \mathrm{Sp}(A) = \lambda_n$$

I.5.4 On garde toujours les mêmes notations. On a

$$|q_A(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| (x'_k)^2 \leq \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2 = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

Le majorant est atteint pour e_k tel que $|\lambda_k| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ (c'est donc e_1 ou e_n) et c'est donc un maximum :

$$N(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

Enfin A est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et son déterminant est égal au produit des λ_k. Ainsi,

$$|\det(A)| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq \left(\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \right)^n = (N(A))^n$$

I.5.5 Un calcul immédiat donne

$$\det(A) = \frac{1}{12}$$

Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{12}$ $(X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A))$. Les valeurs propres de A, qui sont les racines de ce polynôme, sont donc

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

La question précédente donne donc

$$N(A) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

II. Sur les valeurs propres de H_n.

II.1.1 Il s'agit de la formule générale rappelée en **I.1.1** et que l'on prouve en utilisant la formule de calcul du produit scalaire en b.o.n.

$$q_n(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k \right) e_j | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k \right) x_j = \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{j,k} x_k x_j$$

II.1.2 Le développement contient n^2 termes (nombre de choix pour un terme dans la première somme et un autre dans la seconde) :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1} \right) = \sum_{1 \leq k,j, \leq n} x_k x_j t^{k+j-2}$$

II.1.3 On remarque que $\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}\right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2$. En intégrant l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2 dt = \sum_{1 \leq k,j \leq n} \int_0^1 x_j x_k \int_0^{j+k-2} dt$$

Comme $\int_0^1 x_j x_k \int_0^{j+k-2} dt = \frac{1}{j+k-1}$, la question 1 permet d'affirmer que

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2 dt = \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1} = q_n(x)$$

II.1.4 L'intégrale d'une fonction positve sur $[0,1]$ est positive. De plus si la fonction est en plus continue, il ne peut y avoir nullité de l'intégrale que s'il y a nullité de la fonction sur $[0,1]$. Or, $x \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}\right)^2$ est une fonction continue et positive et n'est nulle que si les x_k le sont (une fonction polynomiale n'admet une infinité de racines que si elle est nulle). Ces résultats couplés à la question précédente montrent que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \ q_n(x) > 0$$

En particulier, q_n ne prend que des valeurs > 0 sur Ω_n et on a donc $m_{H_n} > 0$. Avec la question **I.5.3**,

$$\mathrm{Sp}(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*$$

II.2.1 On remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ -i\int_0^\pi (e^{i\theta})^k e^{i\theta}\ d\theta = \frac{-i}{(k+1)i}\left[e^{(k+1)i\theta}\right]_0^\pi = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \int_{-1}^1 t^k\ dt$$

Le passage à l'intégrale étant linéaire, des combinaisons linéaires de ces relations montrent que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ -i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\ d\theta = \int_{-1}^1 P(t)\ dt$$

II.2.2 La partie **II.1** donne

$$0 \le q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t)\ dt$$

Par ailleurs, la question précédente donne

$$\int_0^1 Q^2(t)\ dt \le \int_{-1}^1 Q^2(t)\ dt = \left|\int_{-1}^1 Q^2(t)\ dt\right| = \left|-i\int_0^\pi Q^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\ d\theta\right| \le \int_0^\pi |Q^2(e^{i\theta})|\ d\theta$$

En combinant les deux résultats, on a donc

$$0 \le q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t)\ dt \le \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2\ d\theta$$

S'il y a égalité (à droite, on connaît déjà le cas d'égalité à gauche), il doit y avoir égalité dans toutes les étapes intermédiaires et on doit donc avoir $\int_{-1}^0 Q^2(t)\ dt$. Q étant positive et continue doit être nulle sur $[-1,0]$. Q est donc le polynôme nul (infinité de racines) et ses coefficients sont nuls. x est donc nul. Ainsi

$$\forall x \neq 0,\ 0 < q_n(x) < \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2\ d\theta$$

II.2.3 Explicitons le carré du module ci-dessus en écrivant que $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2 = \sum_{1\le j,k\le n} x_j x_k e^{i(k-j)\theta}$$

On en déduit par linéarité du passage à l'intégrale que

$$\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2\ d\theta = \sum_{1\le j,k\le n} x_j x_k \int_0^\pi e^{i(k-j)\theta}\ d\theta$$

Les intégrales du membre de droite se calculent en distinguant selon que j est ou non égal à k. On obtient

$$\int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2\ d\theta = \pi\|x\|^2 + \frac{1}{i}\sum_{k\neq j} x_k x_j \frac{(-1)^{k-j}-1}{k-j}$$

Dans la somme du membre de droite, on associe les termes deux à deux : un terme (k,j) avec le terme (j,k) et les termes correspondants sont opposés. Ce regroupement montre que la somme est nulle. On a donc

$$\forall x \neq 0,\ 0 < q_n(x) < \int_0^\pi \left|\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2\ d\theta = \pi\|x\|^2$$

II.3.1 La question **I.5.5** indique que

$$\mu_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

La question **I.5.3** donne

$$\mu_n = m_{H_n} \quad \text{et} \quad \rho_n = M_{H_n}$$

La question précédente montre que q_n prend sur Ω_n des valeurs dans $]0, \pi[$ (0 n'étant pas dans Ω_n). On a donc

$$0 < \mu_n \leq \rho_n < \pi$$

Par ailleurs, H_n n'étant pas scalaire et diagonalisable, elle admet au moins deux valeurs propres et $\mu_n < \rho_n$. Ainsi

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi$$

II.3.2 Avec la question **I.5.3** on a

$$q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$$

Il nous reste à voir que tout élément de l'intervalle $[\mu_n, \rho_n]$ admet un antécédent par q_n dans Ω_n. On sait qu'il existe des vecteurs e_1 et e_n non nuls tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$ et $H_n e_n = \rho_n e_n$ (car μ_n et ρ_n sont des valeurs propres). Les sous-espaces propres de H_n étant orthogonaux (théorème spectral), e_1 et e_n le sont (les valeurs propres μ_n et ρ_n sont différentes). Enfin, quitte à les normer (ce qui ne leur fait pas perdre le caractère propre), on peut supposer $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$. On pose alors $x_t = \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0, 1]$, en remarquant que $x_t \in \Omega_n$. On a (formule de **I.5.2**)

$$q_n(x_t) = \mu_n(1-t) + \rho_n t$$

et quand t varie dans $[0, 1]$, $q_n(x_t)$ varie dans $[\mu_n, \rho_n]$. Toutes les valeurs de cet intervalle ont donc un antécédent par q_n dans Ω_n et

$$q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$$

II.3.3 Avec la formule de **II.1.1** on a

$$(q_n(\varepsilon_n)|\varepsilon_n) = \frac{1}{2n-1}$$

On en déduit (on rappelle que $\mu_n = m_{H_n}$) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 < \mu_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

et par théorème d'encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_n = 0$$

III. Limite de $(N(H_n))_{n \geq 2}$ grâce à une intégrale double.

III.1.1 Soit $g \ : \ (x, y) \mapsto (\sqrt{x}, \sqrt{y})$; g est une application de classe C^1 sur $]1, n[\times]1, n[$ et si $(x, y) \in]1, n[\times]1, n[$, la jacobienne de g en (x, y) vaut

$$J(g)(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{xy}}$$

De plus, g est injective sur $]1, n[\times]1, n[$ de manière immédiate. g réalise un C^1 difféomorphisme de $]1, n[\times]1, n[$ dans son image et c'est un bon changement de variable. Comme $g(D_n) = \Gamma_n$, la formule donne

$$I_n = 4 \iint_{\Gamma_n} \frac{du dv}{u^2 + v^2 - 1}$$

Comme $\frac{1}{u^2+v^2-1} \geq \frac{1}{u^2+v^2}$ pour tout $(u,v) \in \Gamma_n$, on en déduit que

$$I_n \geq 4J_n$$

III.1.2 Pour calculer J_n, on peut utiliser le théorème de Fubini ($(u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2}$ est continue sur le compact Γ_n) :

$$\begin{aligned} J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(\int_0^{\sqrt{n}} \frac{dv}{u^2+v^2} \right) dv &= \int_0^{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{u} \arctan(v/u) \right]_{v=1}^{v=\sqrt{n}} \\ &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(\sqrt{n}/u)}{u}\, du - \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(1/u)}{u}\, du \end{aligned}$$

Il reste alors à utiliser la formule rappelée en début de partie III pour conclure que

$$J_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x}\, dx - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx$$

III.2.1 Par concavité de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$, on a $\forall t \geq 0,\ \arctan(t) \leq t$ (ce que l'on peut aussi prouver par une étude de fonction). On en déduit par positivité de l'intégrale que

$$L_n \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}\, dx = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \leq 1$$

Par ailleurs, L_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle. C'est donc une quantité > 0. Ainsi,

$$0 < L_n \leq 1$$

III.2.2 $h\ :\ x \mapsto \frac{1}{x}\arctan(1/x)$ est continue sur $[1,+\infty[$ et équivaut au voisinage de $+\infty$ à $1/x^2$ où elle est donc intégrable. h est ainsi intégrable sur $[1,+\infty[$. Son intégrale converge donc a fortiori. Avec la formule rappelée en début de partie, on a

$$K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\pi/2 - \arctan(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}\ln(n) - \int_0^{\sqrt{n}} h(x)\, dx$$

Quand $n \to +\infty$, le second terme admet une limite finie et est donc négligeable devant le premier qui tend vers $+\infty$. On a donc

$$K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\ln(n)$$

III.2.3 $J_n = K_n - L_n \sim K_n$ car $K_n \to \infty$ alors que (L_n) est bornée. On a donc aussi

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\ln(n)$$

III.3.1 On remarque que

$$\|a\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît sur $[1,+\infty[$, on a $\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$. En sommant ces inégalités, on a donc

$$\|a\|^2 \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n)$$

III.3.2 Découpons le pavé D_n en la réunion de n^2 pavés élémentaires :

$$I_n = \sum_{1 \le j,k \le n-1} \left(\int_j^{j+1} \int_k^{k+1} \frac{dxdy}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \, dy \, dx \right)$$

En notant que $\forall (x,y) \in [j, j+1] \times [k, k+1]$, $\frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \le \frac{1}{\sqrt{jk}(j+k-1)}$ on en déduit que

$$I_n \le \sum_{1 \le j,k \le n-1} \frac{1}{\sqrt{jk}(j+k-1)} \le \sum_{1 \le j,k \le n} \frac{1}{\sqrt{jk}(j+k-1)} = q_n(a)$$

la dernière égalité provenant de la formule **II.1.1**. On a ainsi

$$4J_n \le I_n \le q_n(a)$$

III.3.3 On en déduit que

$$0 \le \frac{4J_n}{1+\ln(n)} \le \frac{4J_n}{\|a\|^2} \le q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$$

et donc que $N(H_n) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_n(x)| \ge \frac{4J_n}{1+\ln(n)}$. La question **II.2.3** montre de même que $N(H_n) \le \pi$. On a ainsi

$$\frac{4J_n}{1+\ln(n)} \le N(H_n) \le \pi$$

La question **III.2.3** montre que la minorant tend vers π. On a donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} N(H_n) = \pi$$

IV. Sur le déterminant de H_n.

IV.1 Pour obtenir $\lambda_{k,n}$, on multiplie l'égalité admise par $x+k$ et on donne à x la valeur $-k$. En particulier, on obtient

$$\lambda_{n,n} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(-n-k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(-n+k)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

IV.2.1 En utilisant la formule admise et un changement d'indice ($j = k+1$) on trouve

$$\begin{aligned} R_{n-1}(i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{k,n-1}}{i+k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1,n-1}}{i+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} h_{i,j} \end{aligned}$$

Si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de H_n, alors les colonnes de A_n sont $C_1, \dots, C_{n-1}$ pour les $n-1$ premières. D'après la formule vue ci-dessus, la dernière est $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} C_j$. Ainsi, par caractère multilinéaire alterné du déterminant

$$\det(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} \det(C_1, \dots, C_{n-1}, C_j) = \lambda_{n-1,n-1} \det(C_1, \dots, C_n) = \lambda_{n-1,n-1} \det(H_n)$$

ou encore, avec la question **IV.1**

$$\det(A_n) = \frac{(2(n-1)!}{(n-1)!} \det(H_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$$

IV.2.2 Comme $R_{n-1}(i)$ est nul pour $i = 1, \dots, n-1$, la dernière colonne de A_n vaut $(0, \dots, R_{n-1}(n)$. Un développement par rapport à cette dernière colonne donne alors

$$\det(A_n) = \det(H_{n-1})R_{n-1}(n) = \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}\det(H_n) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}}$$

On combine les deux formules pour en déduire que

$$\det(H_n) = \frac{1}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}^2}\det(H_{n-1})$$

IV.2.3 On a vu en **II.3.1** que 0 n'est pas valeur propre de H_n et ainsi que $\det(H_n) \neq 0$. On peut même dire que les valeurs propres sont > 0 et, comme H_n est diagonalisable,

$$\forall n \geq 1,\ \det(H_n) > 0$$

On montre par récurrence que $\forall n \geq 1,\ \frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : $\det(H_1) = 1$ et le résultat est vrai pour $n = 1$. $\det(H_2) = \frac{1}{12}$ et le résultat est vrai pour $n = 2$.
- Hérédité : soit $n \geq 3$ tel que la propriété soit vraie aux rangs $1, \dots, n-1$. La relation de la question précédente donne immédiatement le résultat au rang n (à partir de celui au rang $n-1$).

IV.3. Une récurrence s'impose là encore.

- Initialisation : $\det(H_2) = \frac{1}{12}$ et comme $\Phi_1 = 1$ et $\Phi_2 = 12$, le résultat est vrai pour $n = 2$.
- Hérédité : soit $n \geq 3$ tel que la propriété soit vraie aux rangs $2, \dots, n-1$. La relation de la question **IV.2.2** donne alors

$$\det(H_n) = \frac{\Phi_{n-2}^4}{\Phi_{2n-3}}\frac{(n-1)!^4}{(2n-2)!(2n-1)!} = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$$

ce qui prouve le résultat au rang n.