Un Corrigé de l'épreuve spécifique PSI de CCP 2013 par Rodolphe Garin

PARTIE I

I) 1) 1) La sphère unité Ω_n est bornée et fermée comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $x \mapsto \|x\|$, donc Ω_n est un compact; les applications $x \mapsto Ax$ et $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ sont respectivement linéaires et bilinéaires donc continues ce qui assure que q_A est continue donc la fonction numérique q_A est bornée sur Ω_n et atteint ses bornes.

I) 1) 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \cap sp\,(A)$ et x un vecteur propre associé qu'on peut, quitte à diviser par sa norme, supposer dans Ω_n, alors $q_A\,(x) = \langle Ax \mid x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda \Rightarrow m_A \leq \lambda \leq M_A$. Ainsi $\mathbb{R} \cap sp\,(A) \subset [m_A, M_A]$.

I) 1) 3) A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux donc $sp\,(A) = \{2\}$; si $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ on a $q_A\,(x) = 2\cos^2(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) + 2\sin^2(\theta) = 2 - \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ donc $m_A = q_A\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \frac{3}{2}$ et $M_A = q_A\left(\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \frac{5}{2}$.

I) 2) 1) Comme $q_A\,(0) = 0$ supposons $y \neq 0$ alors $q_A\,(y) = q_A\,(\|y\|\, y'), y' = \frac{y}{\|y\|}$ donc puisque $y' \in \Omega_n$, $q_A\,(y) = \|y\|^2\, q_A\,(y') = 0$.

I) 2) 2) D'après la bilinéarité du produit scalaire et la question I) 2) 1), $q_A\,(y+z) = \langle Ay \mid z \rangle + \langle Az \mid y \rangle$.

I) 2) 3) On a $\langle Az \mid y \rangle = \langle z \mid ({}^tA)\,y \rangle = \langle ({}^tA)\,y \mid z \rangle$ donc grâce à I) 2) 2), pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle ({}^tA + A)\,y \mid z \rangle$ d'où pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $({}^tA + A)\,y = 0 \Rightarrow {}^t A + A = 0$ et donc A est antisymétrique.

On peut aussi suivant les indications de l'énoncé remarquer que $(*)\ \langle Ay \mid z \rangle = \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{n} a_{l,p} y_p z_l$ et donc $\langle Az \mid y \rangle = \langle ({}^tA)\,y \mid z \rangle = \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{n} a_{p,l} y_p z_l \Rightarrow \langle Ay \mid z \rangle + \langle Az \mid y \rangle = \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{n} (a_{l,p} + a_{p,l})\, y_p z_l$ d'où pour tout $(j,k) \in \{1, ..., n\}^2$, en remplaçant y par le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et z par le k-ième vecteur de la dite base on a $a_{j,k} + a_{k,j} = 0$ ce qui assure que A est antisymétrique.

I) 3) Il est clair que si $A = 0$ alors $\forall x \in \Omega_n, q_A\,(x) = 0$; réciproquement si $\forall x \in \Omega_n, q_A\,(x) = 0$, la question précédente assure que A est antisymétrique et étant symétrique par hypothèse, alors $A = 0$.

I) 4) -) si $N\,(A) = 0$ alors $\forall x \in \Omega_n, q_A\,(x) = 0$ donc d'après I) 3), $A = 0$;
-) il est clair que si $\lambda = 0$ alors $N\,(\lambda A) = |\lambda|\, N\,(A)$; soit donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\forall x \in \Omega_n, |q_{\lambda A}\,(x)| = |\lambda|\,|q_A\,(x)| \leq |\lambda|\, N\,(A)$ donc $N\,(\lambda A) \leq |\lambda|\, N\,(A)$ et d'autre part en utilisant ce qui précède on a $N\,(A) = N\left(\frac{1}{\lambda}\,(\lambda A)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N\,(\lambda A) \Rightarrow |\lambda|\, N\,(A) \leq N\,(\lambda A)$ d'où l'égalité $N\,(\lambda A) = |\lambda|\, N\,(A)$.
-) on a pour tout $x \in \Omega_n$, $|q_{A+B}\,(x)| = |\langle Ax \mid x \rangle + \langle Bx \mid x \rangle| \leq |\langle Ax \mid x \rangle| + |\langle Bx \mid x \rangle| \leq N\,(A) + N\,(B) \Rightarrow N\,(A+B) \leq N\,(A) + N\,(B)$.
On peut donc conclure que N est une norme.

I) 5) 1) En reprenant le calcul fait à la question I) 1) 2) on a $q_A\,(e_k) = \lambda_k$.

I) 5) 2) Puisque la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée alors $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x'_k)^2$ et puisque $x \in \Omega_n$ alors $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x'_k)^2 = 1$. De même $q_A\,(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\,(x'_k)^2$.

I) 5) 3) D'après les questions précédentes, on a pour tout $x \in \Omega_n$, $\lambda_1 = q_A\,(e_1) = \lambda_1 \times 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_1\,(x'_k)^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\,(x'_k)^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_n\,(x'_k)^2 = \lambda_n = q_A\,(e_n)$ donc la fonction q_A possède un minimum $m_A = \lambda_1$ et un maximum $M_A = \lambda_n$ sur la sphère unité Ω_n.

I) 5) 4) soit $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $|\lambda_i| = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$; alors $\max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| = |q_A(e_i)| \leq N(A)$ et enfin pour tout $x \in \Omega_n$, $|q_A(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| (x'_k)^2 \leq \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$ donc $N(A) \leq \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$; ainsi on a bien $N(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$. Puisque $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ alors $|\det(A)| \leq \left(\max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| \right)^n = (N(A))^n$.

I) 5) 5) On a $\det(A) = \frac{1}{12}$ et le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{12}$ qui a pour racines $\frac{4+\sqrt{13}}{6}$ et $\frac{4-\sqrt{13}}{6}$ donc $sp(A) = \left\{ \frac{4+\sqrt{13}}{6}, \frac{4-\sqrt{13}}{6} \right\}$ et donc $N(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| = \frac{4+\sqrt{13}}{6}$.

PARTIE II

II) 1) 1) D'après l'égalité $(*)$ de I) 2) 3) on a $q_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{j+k-1} x_k \right) x_j = \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}$.

II) 1) 2) On a $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k x_j t^{k+j-2}$.

II) 1) 3) On a $\int_0^1 t^{k+j-2} dt = \frac{1}{k+j-1}$ donc $\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1} \right) dt =$
$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k x_j t^{k+j-2} \right) dt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k x_j \int_0^1 t^{k+j-2} dt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k x_j \frac{1}{j+k-1} = q_n(x)$.

II) 1) 4) La fonction $w : t \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2$ est positive donc puisque $0 < 1$ alors $q_n(x) \geq 0$, et puisque w est aussi continue $q_n(x) = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1], \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} = 0$ donc le polynôme $\sum_{k=1}^{n} x_k X^{k-1}$ a une infinité de racines donc est identiquement nul c'est-à-dire $x_1 = ... = x_n = 0 \Rightarrow x = 0$. Il est clair que $x = 0 \Rightarrow q_n(x) = 0$. On déduit alors aisément que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

II) 2) 1) Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\int_{-1}^{1} t^k dt = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ \frac{2}{k+1} \text{ si } k \text{ est pair} \end{cases}$ et $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = -\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1}$ donc $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ \frac{2}{k+1} \text{ si } k \text{ est pair} \end{cases}$ d'où $\int_{-1}^{1} t^k dt = -i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta$. Ainsi $\int_{-1}^{1} P(t) dt = \sum_{k=0}^{m} a_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{k=0}^{m} a_k (-i) \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta =$ $-i \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{m} a_k e^{ik\theta} \right) e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta$.

II) 2) 2) D'après II) 1) 4) on a $0 \leq q_n(x)$ avec inégalité stricte si $x \neq 0$; on a $\int_0^1 (Q(t))^2 dt \leq \int_{-1}^{1} (Q(t))^2 dt$ avec inégalité stricte si $Q(t) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, mais grâce à II) 2) 1), $0 \leq \int_{-1}^{1} (Q(t))^2 dt = \int_0^\pi -i \left(Q\left(e^{i\theta}\right)\right)^2 e^{i\epsilon} d\theta =$
$\left| \int_0^\pi -i \left(Q\left(e^{i\theta}\right)\right)^2 e^{i\epsilon} d\theta \right|$
$\leq \int_0^\pi \left| -i \left(Q\left(e^{i\theta}\right)\right)^2 e^{i\epsilon} \right| d\theta = \int_0^\pi \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta = \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$.

II) 2) 3) En utilisant le changement de variable $\eta = 2\pi - \theta$ on a $\int_\pi^{2\pi} \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta = \int_0^\pi \left| Q\left(e^{-i\eta}\right) \right|^2 d\eta$ et puisque $Q\left(e^{-i\eta}\right) = \overline{Q\left(e^{i\eta}\right)}$ car $Q \in \mathbb{R}[X]$ on a alors $\int_\pi^{2\pi} \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta = \int_0^\pi \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \Rightarrow \int_0^\pi \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta$.
Si $f : \theta \mapsto Q\left(e^{i\theta}\right)$ alors par application du théorème de Bessel-Parseval on a $\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta =$ $\pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2 = \pi \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \pi \|x\|^2$.
D'après la question précédente on a donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq q_n(x) \leq \pi \|x\|^2$ avec inégalités strictes si $x \neq 0$.

II) 3) 1) De I) 5) 5) on a $\mu_2 = \frac{4-\sqrt{13}}{6}$ et $\rho_2 = \frac{4+\sqrt{13}}{6}$. Puisque les valeurs propres de H_n sont strictement positives alors $0 < \mu_n$; comme la matrice H_n est diagonalisable et non scalaire, les valeurs propres de H_n ne sont pas toutes égales donc $\mu_n < \rho_n$; enfin si e_n est vecteur propre unitaire de H_n associé à ρ_n on a en vertu des questions I) 5) 1) et II) 2) 3) $0 < q_n(e_n) = \rho_n < \pi$.

II) 3) 2) On sait que $q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$; enfin si $z \in [\mu_n, \rho_n]$ il exixte $t \in [0,1]$ tel que $z = (1-t)\mu_n + t\rho_n$, d'où si $x = \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n$ on a $q_n(x) = \left\langle \sqrt{1-t}\mu_n e_1 + \sqrt{t}\rho_n e_n \mid \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n \right\rangle = (1-t)\mu_n + t\rho_n = z \Rightarrow [\mu_n, \rho_n] \subset q_n(\Omega_n)$. On peut donc conclure que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$.

II) 3) 3) D'après II) 1) 1) $q_n(\varepsilon_n) = \langle H_n \varepsilon_n \mid \varepsilon_n \rangle = \frac{1^2}{n+n-1} = \frac{1}{2n-1}$ donc puisque $\varepsilon_n \in \Omega_n$ alors
$0 < \mu_n \leq \frac{1}{2n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0$.

PARTIE III

III) 1) 1) Posons pour $(u,v) \in \Gamma_n, \Psi(u,v) = (u^2, v^2)$, alors $\Psi(\Gamma_n) = D_n$ et la valeur absolue du Jacobien de Ψ en (u,v) est $4uv$ donc d'après le théorème du changement de variable pour les intégrales multiples,

$$I_n = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4uv}{\sqrt{u^2v^2}(u^2+v^2-1)} du \right) dv = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2+v^2-1} \right) dv.$$

Or pour tout $v \in [1, \sqrt{n}]$ comme $1 \leq \sqrt{n}$ on a $\frac{1}{u^2+v^2-1} \geq \frac{1}{u^2+v^2} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2+v^2-1} \geq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2+v^2}$ donc puisque $1 \leq \sqrt{n}$ on a de plus $I_n \geq \int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2+v^2} \right) dv = 4J_n$.

III) 1) 2) En utilisant le changement de variable $t = \frac{u}{v}$ on a

$$\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2+v^2} = \frac{4}{v} \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{\sqrt{n}}{v}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{v}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{v}\right) - \arctan\left(\frac{1}{v}\right) \right) = \frac{1}{v}\left(\arctan(v) - \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right),$$

donc $J_n = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\frac{\arctan(v)}{v} \right) dv - \int_1^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{v} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right) dv = K_n - L_n$.

III) 2) 1) On a $0 \leq t \Rightarrow \arctan(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^t dx = t \Rightarrow \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{x}{\sqrt{n}}$ donc puisque de plus $x \mapsto \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ est positive continue non nulle sur $[1, \sqrt{n}]$ on a $0 < L_n \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} dx = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \leq 1$.

III) 2) 2) On a en utilisant la majoration de $\arctan(t)$ vue à la question précédente $0 < \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^2}$ donc la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ assure la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$. En utilisant la relation rappelée au début on a

$K_n = \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{n}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\pi}{4}\ln(n) - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$. Enfin puisque la suite $\left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \right)_{n\geq 1}$ converge d'après la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$ et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4}\ln(n) = +\infty$ alors

$\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\pi}{4}\ln(n)\right) \Rightarrow K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\ln(n)$.

III) 2) 3) La suite $(L_n)_{n\geq 1}$ est bornée en vertu de III) 2) 1) donc en utilisant la question précédente on a
$L_n \underset{n\to+\infty}{=} o(K_n)$ car $\lim_{n\to+\infty} K_n = +\infty$ d'où $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K_n$ et donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\ln(n)$.

III) 3) 1) On a $\|a\|^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ et puisque $\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ alors
$\|a\|^2 \leq 1 + \ln\left(\frac{n}{1}\right) = 1 + \ln(n)$.

III) 3) 2) Pour $(k,j) \in \{1,...,n-1\}^2$ posons $D_{n,k,j} = [k,k+1] \times [j,j+1]$; ainsi D_n est la réunion des rectangles $D_{n,k,j}$ dont les intersections sont d'aire nulle donc

$$I_n = \sum_{1 \le k,j \le n-1} \int_k^{k+1} \left(\int_j^{j+1} \frac{dy}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \right) dx,$$

mais pour $(x,y) \in [k,k+1] \times [j,j+1]$ on a aisément $\int_k^{k+1} \left(\int_j^{j+1} \frac{dy}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \right) dx \le \int_k^{k+1} \left(\int_j^{j+1} \frac{dy}{\sqrt{kj}(k+j-1)} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{kj}(k+j-1)}$ donc $I_n \le \sum_{1 \le k,j \le n-1} \frac{1}{\sqrt{kj}(k+j-1)} \le \sum_{1 \le k,j \le n} \frac{1}{\sqrt{kj}(k+j-1)} = q_n(a)$ d'après la question II) 1) 1). Finalement en utilisant la question III) 1) 1) on conclut donc que $4J_n \le q_n(a)$.

III) 3) 3) En vertu de II) 2) 3), pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \ne 0$ on a $q_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{q_n(x)}{\|x\|^2} \le \pi \Rightarrow N(H_n) \le \pi$; de plus $N(H_n) \ge q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \frac{q_n(a)}{\|a\|^2} \ge \frac{4J_n}{1+\ln(n)}$ d'après les deux questions précédentes donc puisque $\frac{4J_n}{1+\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi \ln(n)}{\ln(n)} = \pi$ suivant III) 2) 3), alors on a $\lim_{n \to +\infty} N(H_n) = \pi$.

PARTIE IV

IV) 1) En multipliant par $(x+n)$ les deux membres de l'égalité $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{k,n}}{(x+k)}$ on a

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(x-k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} = \lambda_{n,n} + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n} \frac{(x+n)}{(x+j)},$$

puis en remplaçant x par $-n$ on obtient: $\lambda_{n,n} = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^{n}(n+k)}{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(n-k)} = \frac{(n+1)...(2n)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$.

IV) 2) 1) Si $H_n = (h_{i,j})_{1 \le i,j \le n}, h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$, alors de IV) 1) on a $R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1,n-1}}{i+j-1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} h_{i,j}$.

Notons pour $1 \le i \le n, C_i$ la i-ième colonne de H_n alors $\det(A_n) = \det\left(C_1,...,C_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} C_j\right)$.

Puisque le déterminant est une forme multilinéaire et alternée alors
$\det(A_n) = \lambda_{n-1,n-1} \det(C_1,...,C_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$.

IV) 2) 2) On a $R_{n-1}(i) = 0$ si $1 \le i \le n-1$ donc en développant suivant la dernière colonne, on a
$\det(An) = R_{n-1}(n) \det(H_{n-1}) = \frac{(n-1)!}{n...(2n-1)} \det(H_{n-1}) = \frac{1}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}} \det(H_{n-1})$.
Ainsi en utilisant la question précédente on a alors $\det(H_n) = \frac{1}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}^2} \det(H_{n-1})$.

IV) 2) 3) Les valeurs propres de H_n sont strictement positives donc $\det(H_n) \ne 0$. D'après la question précédente, $\frac{1}{\det(H_n)} = (2n-1)\left(\binom{2(n-1)}{n-1}\right)^2 \frac{1}{\det(H_{n-1})}$. On a donc $\frac{1}{\det(H_2)} = 12 \in \mathbb{N}^*$ et en utilisant ce qui précède, par récurrence aisée on a alors $\frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$ pour $n \ge 2$.

IV) 3) Pour $n \ge 2$ soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition " $\det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$ "; comme $\det(H_2) = \frac{1}{12} = \frac{\Phi_1^4}{\Phi_3}$ alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie; supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie à un rang $n \ge 3$ alors grâce à IV) 2) 2), $\det(H_n) = \frac{((n-1)!)^4}{(2n-1)!(2n-2)!} \times \frac{\prod_{k=1}^{n-2}(k!)^4}{\prod_{k=1}^{2n-3} k!} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k!)^4}{\prod_{k=1}^{2n-1} k!} = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$ donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie et donc pour tout $n \ge 2$ on a $\det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$.