EPREUVE CCP PSI 2013, MATH II en 4 h

****

Calculatrice autorisée

****

PARTIE 1

1. 1.1. La sphère unité $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n / \parallel x \parallel = 1\}$ est une partie bornée et fermée (image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application norme continue) de $\mathbb{R}^n$: c'est donc un compact.

L'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie : elle est continue. De plus, le produit scalaire est aussi continu sur $\mathbb{R}^n$ (bilinaire sur $\mathbb{R}^n$ de dimension finie).

On en déduit par composition que $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto < Ax|x >$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Au final, q_A est continue sur le compact Ω_n et à valeurs réelles :

$\boxed{q_A \text{ est donc bornée et atteint ses bornes sur } \Omega_n.}$

1.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \cap sp(A)$: il existe un vecteur $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, que l'on peut prendre unitaire (quitte à le diviser par sa norme), tel que $Ax = \lambda x$.

On a alors $q_A(x) =< Ax|x >= \lambda < x|x >= \lambda$ car $x \in \Omega_n$.

Par définition de m_A et M_A, on en déduit que $m_A \leq \lambda \leq M_A$ d'où : $\boxed{\mathbb{R} \cap sp(A) \subset [m_A, M_A]}$

1.3. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure, les valeurs propres sont les éléments diagonaux : 2 est valeur propre double et $sp(A) = \{2\}$.

Si $x \in \Omega_2$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

Calculons $q_A(x)$:

$q_A(x) =< Ax|x >=< \begin{pmatrix} 2\cos\theta - \sin\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} >= 2 - \sin\theta\cos\theta = 2 - \dfrac{\sin(2\theta)}{2}.$

Cette quantité est maximale quand le $\sin(2\theta)$ est minimal et vaut donc -1. On trouve donc $M_A = 2 + 1/2 = 5/2$.

De même, $m_A = 2 - 1/2 = 3/2$.

On vérifie bien que $\mathbb{R} \cap sp(A) \subset [m_A, M_A]$.

2. 2.1. Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

Si $y = 0$, on a bien $q_A(y) = 0$.

Si $y \neq 0$, notons $x = \dfrac{y}{\parallel y \parallel} \in \Omega_n$.

On a alors $q_A(x) = 0 = q_A(\dfrac{y}{\parallel y \parallel}) =< A\dfrac{y}{\parallel y \parallel} | \dfrac{y}{\parallel y \parallel} >= \dfrac{q_A(y)}{\parallel y \parallel^2}$.

On en déduit que $q_A(y) = 0$ et au final, $\boxed{q_A(y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n}$

2.2. Soient y et z dans $\mathbb{R}^n$. Par bilinéarité du produit scalaire,

$q_A(y + z) = 0 =< A(y + z)|y + z >=< Ay|y > + < Ay|z > + < Az|y > + < Az|z >$

$q_A(y + z) = 0 =< Ay|z > + < Az|y >$ avec la question précédente.

donc $\boxed{< Ay|z > + < Az|y >= 0}$

2.3. Prenons alors $y = e_j$ et $z = e_k$ avec $1 \leq k, j \leq n$.

Si on calcule $< Ay|z >=< \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ (ligne k)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} | >= a_{k,j}$.

De même, $< Az|y >= a_{j,k}$.

On a donc $\forall (j,k) \in \{1, ..., n\}^2,\ a_{k,j} = -a_{j,k}$: $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est antisymétrique.}}$

3. On suppose que A est une matrice symétrique.
Le sens $A = (0)$ implique $\forall x \in \Omega_n,\ q_A(x) = 0$ est évident.
Supposons que $\forall x \in \Omega_n,\ q_A(x) = 0$.
Par la question I.2.3, A est antisymétrique.
Or par hypothèse A est aussi symétrique donc ${}^tA = A = -A$ donc $A = (0)$.

4. Avec la question I.1.1, on peut bien définir $N : S_n(R) \to \mathbb{R}^+, A \mapsto \sup_{x\in\Omega_n} |q_A(x)|$.

Montrons que l'on définit bien une norme.

- Soit $A \in S_n(R)$ et $\lambda \in R$:
  $N(\lambda A) = sup_{x\in\Omega_n} | < \lambda Ax|x > | = \sup_{x\in\Omega_n} |\lambda < Ax|x > | = |\lambda| \sup_{x\in\Omega_n} |q_A(x)| = |\lambda| N(A)$.
- Soit $A, B \in S_n(R)$.
  Pour tout $x \in \Omega_n$, $q_{A+B}(x) =< (A + B)x|x >=< Ax|x > + < Bx|x >= q_A(x) + q_B(x)$.
  En passant à l'inégalité triangulaire et par définition de $N(A)$ et $N(B)$,
  $|q_{A+B}(x)| \leq |q_A(x)| + |q_B(x)| \leq N(A) + N(B)$.
  Ceci étant valable $x \in \Omega_n$, on en déduit que $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$.
- Soit A dans $S_n(R)$.
  Enfin, si $A = (0)$, il est évident que $N(A) = 0$.
  et si $N(A) = 0$, $\forall x \in \Omega_n,\ q_A(x) = 0$ et par I.1.3, $A = (0)$.

Au final, $\boxed{N : S_n(R) \to \mathbb{R}^+, A \mapsto \sup_{x\in\Omega_n} |q_A(x)| \text{ est bien une norme.}}$

5. 5.1. En calculant, $q_A(e_k) =< Ae_k|e_k >= \lambda_k < e_k|e_k >= \lambda_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

5.2. Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x'_k e_k$. Comme la base $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée, on a alors

$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2 = 1$ car $x \in \Omega_n$.

De plus, par bilinéarité,

$$q_A(x) =< Ax|x >=< \sum_{k=1}^{n} x'_k Ae_k | \sum_{j=1}^{n} x'_j e_j >=< \sum_{k=1}^{n} x'_k \lambda_k e_k | \sum_{j=1}^{n} x'_j e_j >$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x'_k x'_j \lambda_k < e_k|e_j >.$$

Or la base $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée, $< e_k|e_j >= \delta_{k,j}$ donc

$$\boxed{q_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x'_k)^2.}$$

5.3. Comme $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et que les $(x'_k)^2 \geq 0$, on a en encadrant,

$$\lambda_1 = \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2.\lambda_1 \leq q_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x'_k)^2 \leq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2 = \lambda_n.$$

On a donc pour tout $x \in \Omega_n$, $\lambda_1 \leq q_A(x) \leq \lambda_n$.

De plus, $q_A(e_1) = \lambda_1$ et $q_A(e_n) = \lambda_n$ avec $e_1, e_n \in \Omega_n$.

On en déduit que q_A est bornée sur Ω_n et atteint ses bornes : on retrouve le résultat de la question I.1.1.

De plus, $\boxed{m_A = \lambda_1 \text{ et } M_A = \lambda_n.}$

5.4. On en déduit que $N(A) = \sup_{x\in\Omega_n} |q_A(x)| = max(|\lambda_1|, |\lambda_n|) = \max_{\lambda\in(A)} |\lambda|$.

Enfin, comme $det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$, $\boxed{|det(A)| = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq N(A)^n.}$

5.5. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, on trouve $detA = 1/12$ et comme le polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4/3\lambda + 1/12$, on trouve comme valeurs propres, $\dfrac{4 \pm \sqrt{13}}{6}$.

On a donc $N(A) = \dfrac{4 + \sqrt{13}}{6}$.

PARTIE 2

1. 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$: $q_n(x) =< H_n x | x >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (H_n x)_k x_k$ où $(H_n x)_k$ désigne la k ième coordonnées de $H_n x$.

Or, $(H_n x)_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} x_i$.

On a donc $\boxed{q_n(x) =< H_n x | x >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} x_i x_k = \sum_{1 \le k,i \le n} \frac{x_i x_k}{i+k-1}.}$

1.2. Développons :

$P(t) = (\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1})(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1}) = (x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1})(x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1})$

C'est un ploynôme en t de degré maximum 2n-1 et en développant :

$P(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} (\sum_{1 \le i,j \le n, i+j=p+2} x_i x_j) t^p$.

1.3. Intégrons ceci entre 0 et 1 :

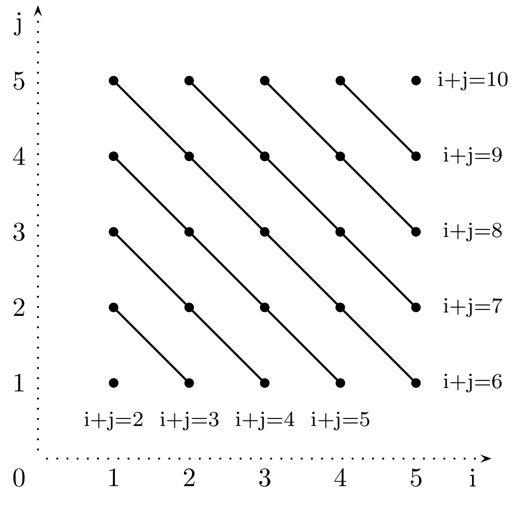
$\displaystyle\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{2n-1} (\sum_{1 \le i,j \le n, i+j=p+2} x_i x_j) \int_0^1 t^p\ \mathrm{d}t$.

$= \displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} (\sum_{1 \le i,j \le n, i+j=p+2} x_i x_j) \frac{1}{p+1} = \sum_{p=0}^{2n-1} (\sum_{1 \le i,j \le n, i+j=p+2} x_i x_j \frac{1}{p+1})$

$= \displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} (\sum_{1 \le i,j \le n, i+j=p+2} x_i x_j \frac{1}{i+j-1})$

Dessinons le domaine de sommation :

$0 \le p \le 2n-1$ et $1 \le i,j \le n, i+j = p+2$: c'est le carré de côté $\{1..., n\}$ dont on somme les éléments suivant les diagonales :



Il s'agit donc aussi de la somme de tous les éléments du carré et donc
$\displaystyle\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1})^2\ \mathrm{d}t = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \frac{1}{i+j-1} = q_n(x)$ par II.1.1.

1.4. Comme $(\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1})^2 \geq 0$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_n(x) \geq 0$.
De plus, si $x = 0$, il est évident que $q_n(x) = 0$.
Et si $q_n(x) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 (\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1})^2\ \mathrm{d}t = 0$.
Or l'application $t \mapsto (\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1})^2$ est continue (polynomiale), postive sur $[0,1]$, d'intégrale nulle sur $[0,1]$. C'est donc la fonction nulle sur $[0,1]$.
La fonction polynomiale $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$ a une infinité de racines : c'est donc le polynome nul.
Tous ses coefficients sont donc nuls : $\forall 1 \leq k \leq n, x_k = 0$ et donc $\boxed{x = 0.}$

De plus, comme par I.5.1, avec les notations de cette question, $q_n(e_k) = \lambda_k$, on en déduit que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

2. 2.1. Calculons $\displaystyle\int_{-1}^1 t^k\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}[t^{k+1}]_{-1}^1 = \frac{1}{k+1}(1-(-1)^{k+1})$.
De plus, $-i\displaystyle\int_0^\pi e^{ik\theta}e^{i\theta}\ \mathrm{d}\theta = -i\int_0^\pi e^{i(k+1)\theta}\ \mathrm{d}\theta = \frac{-i}{i(k+1)}[e^{i(k+1)\theta}]_0^\pi = \frac{-1}{k+1}(e^{i(k+1)\pi}-1)$
$\displaystyle = \frac{1}{k+1}(1-(-1)^{k+1})$.
Ces deux intégrales sont donc égales et par linéarité de l'intégrale, on en déduit par combinaison linéaire que :

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme P, } \int_1^1 P(t)\ \mathrm{d}t = -i\int_0^\pi P(i\theta)e^{i\theta}\ \mathrm{d}\theta}$$

2.2. On a alors avec II.1.3,
$0 \leq q_n(x) = \displaystyle\int_0^1 Q(t)^2\ \mathrm{d}t \leq \int_{-1}^1 Q(t)^2\ \mathrm{d}t$ car on intègre une fonction réelle positive.
Utilisons alors la question précédente :
$$\int_{-1}^1 Q(t)^2\ \mathrm{d}t = |\int_{-1}^1 Q(t)^2\ \mathrm{d}t| = |-i\int_0^\pi Q^2(i\theta)e^{i\theta}\ \mathrm{d}\theta| \leq \int_0^\pi |Q^2(i\theta)||e^{i\theta}|\ \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi |Q(i\theta)|^2\ \mathrm{d}\theta.$$
Si $x = 0$, l'inégalité précedénte est une égalité.
Si la première inégalité precédente est une égalité, on a par II.1.4, $x = 0$.
Si la seconde inégalite précédente est une égalité, on a alors $\displaystyle\int_{-1}^0 Q(t)^2\ \mathrm{d}t = 0$, ce qui donne avec un raisonnement analogue à celui de II.1.4, $x = 0$.

2.3. Calculons le second membre en calculant d'abord :
$$|Q(i\theta)|^2 = |\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta}|^2 = (\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta})\overline{(\sum_{j=1}^n x_k e^{i(j-1)\theta})}$$
$$|Q(i\theta)|^2 = (\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta})(\sum_{j=1}^n x_k e^{i(-j+1)\theta}) = \sum_{1\le k,j\le n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta}$$
$$|Q(i\theta)|^2 = \sum_{1\le k\le n} (x_k)^2 + \sum_{1\le k<j\le n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} + \sum_{1\le j<k\le n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta}.$$
Dans la dernière somme, permutons les deux indices par un changement de variables.
On a alors $\displaystyle\sum_{1\le j<k\le n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} = \sum_{1\le k<j\le n} x_k x_j e^{i(j-k)\theta}$ et en regroupons avec l'autre somme,

$$\sum_{1\le k<j\le n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} + \sum_{1\le k>j\le n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} = \sum_{1\le k<j\le n} x_k x_j 2\cos((k-j)\theta).$$

Intégrons maitenant tout ceci entre à et π : il ne reste pas grand chose car

$$\text{si } k \neq j,\ \int_0^\pi 2\cos((k-j)\theta)\ \mathrm{d}\theta = 0.$$

Au final,

$$\boxed{\int_0^\pi |Q(i\theta)|^2\ \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \sum_{1\le k\le n} (x_k)^2\ \mathrm{d}\theta = \pi \sum_{1\le kn} (x_k)^2 = \pi\|x\|^2.}$$

Comme on a calculer de façon exacte le second membre de II.2.2, on a l'inégalité stricte pour $x \neq 0$.

3. 3.1. On a $\mu_2 = \dfrac{4-\sqrt{13}}{6}$ et $\rho_2 = \dfrac{4+\sqrt{13}}{6}$ car H_2 est la matrice de la question I.5.5.

Comme μ_n et ρ_n sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs prpres de H_n, avec les notations de la question I.5 il existe e_1 et e_n, vecteurs orthonormés tels que $H_n(e_1) = \mu_n e_1$ et $H_n(e_n) = \rho_n e_n$.

Or par I.5.1, $q_n(e_1) = \mu_n$ et $q_n(e_n) = \rho_n$.

Avec la question II.2.3, les vecteurs étants non nuls, $0 < \mu_n \le \rho_n < \pi$.

De plus, si $\mu_n = \rho_n$, H_n a une unique valeur propre μ et comme H_n est diagonalisable, elle est semblable à μI_n donc égale à μI_n, ce qui est impossible.

On a donc $\boxed{0 < \mu_n < \rho_n < \pi.}$

3.2. Par la question I.5.2, on a déjà que si $x \in \Omega_n$, $\mu_n \le q_n(x) \le \rho_n$ donc $q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$.

Soit maintenant un réel λ de $[\mu_n, \varrho_n]$: il existe t dans $[0,1]$ tel que $\lambda = (1-t)\mu_n + t\rho_n$.

Reprenons les vecteurs e_1 et e_n de la question précédente et considérons $x = \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n$.

Comme (e_1, e_n) est une famille orthogonale, $\|x\|^2 = (1-t) + t = 1$ donc $x \in \Omega_n$.

De plus, $q_n(x) =< \sqrt{1-t}\mu_n e_1 + \sqrt{t}\rho_n e_n | \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n >= (1-t)\mu_n + t\rho_n = \lambda$ car (e_1, e_n) est orthogonale.

On a donc $q_n(x) = \lambda$ avec $x \in \Omega_n$ donc $\lambda \in q_n(\Omega_n)$ et $\boxed{q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n].}$

3.3. Après calculs, $q_n(\epsilon_n) =< H_n\epsilon_n | \epsilon_n >= \dfrac{1}{2n-1}$.

Comme $0 < \mu_n \le q_n(\epsilon_n) = \dfrac{1}{2n-1}$, on obtient par passage à la limite que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = 0$

PARTIE 3

1. 1.1. Posons $(x,y) = (u^2, v^2)$: le jacobien de ce changement de variable est

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 4uv \neq 0.$$

On obtient bien un C^1 difféomorphisme $(u,v) \to (u^2, v^2)$, de Γ_n sur le domaine D_n. Utilisons la formule de changement de variable sur les intégrales doubles :

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{\Gamma_n} \frac{|4uv|}{uv(u^2+v^2-1)}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

$$I_n = \iint_{\Gamma_n} \frac{4}{u^2+v^2-1}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \ge \iint_{\Gamma_n} \frac{4}{u^2+v^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 4J_n.$$

1.2. $J_n = \iint \Gamma_n \dfrac{1}{u^2+v^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{u^2+v^2}\ \mathrm{d}u\right)\ \mathrm{d}v = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}[\arctan\frac{u}{v}]_1^{\sqrt{n}}\ \mathrm{d}v.$

$$J_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}\arctan\frac{\sqrt{n}}{v}\ \mathrm{d}v - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}\arctan\frac{1}{v}\ \mathrm{d}v.$$

Utilisons alors la propriété rappelée sur arctan :

$J_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\ \mathrm{d}v - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan v\right)\ \mathrm{d}v$ $J_n = -\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}\arctan\frac{v}{\sqrt{n}}\ \mathrm{d}v + \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}\arctan v\ \mathrm{d}v = K_n - L_n.$

2. 2.1. On sait que si $t \geq 0$, $0 \leq \arctan t \leq t$, on en déduit que
$$0 \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan \frac{v}{\sqrt{n}} \, dv \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \frac{v}{\sqrt{n}} \, dv \leq 1.$$
De plus, $L_n > 0$ car on intègre une fonction continue positive non identiquement nulle.

2.2. La fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x} \arctan \dfrac{1}{x}$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $h(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ car en O^+, $\arctan u \sim u$. Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est integrable sur $[1, +\infty[$.
Par comparaison avec les intégrales de Reimann, on en déduit que h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ecrivions alors
$K_n = \displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan v \, dv = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v}(-\arctan 1/v + \frac{\pi}{2}) \, dv = -\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan 1/v \, dv + \frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{n})$
L'integrale converge vers un réel et est négligeable devant le terme $\dfrac{\pi}{2} \ln(\sqrt{n})$ quitend vers $+\infty$.

On en déduit $\boxed{K_n \sim \dfrac{\pi}{4} \ln n.}$

2.3. Enfin, $J_n = K_n - L_n$, avec la suite (L_n) bornée qui est donc négligeable devant $K_n \sim \dfrac{\pi}{4} \ln n$.

On en déduit $\boxed{J_n \sim \dfrac{\pi}{4} \ln n.}$

3. 3.1. Calculons $\| a \|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On sait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ decroit sur $[1, +\infty[$. Soit $k \geq 1$. Si $x \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x}$.
Intégrons entre k et $k+1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$

Puis sommons de $k = 1$ à $n - 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n)$ (somme telescopique)

On en déduit que $\boxed{\| a \|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).}$

3.2. Calculons $q_n(a) = \displaystyle\sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{a_i a_k}{i + k - 1} = \sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i + k - 1)}$.

Considérons déjà, à k fixé, $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i + k - 1)}$.

L'application continue $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{xk}(x + k - 1)}$ décroit sur $[i, i+1]$ donc
$\dfrac{1}{\sqrt{xk}(x + k - 1)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{ik}(i + k - 1)}$ sur $[i, i+1]$.
Intégrons entre i et $i + 1$
$\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{1}{\sqrt{xk}(x + k - 1)} \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{ik}(i + k - 1)}$,

puis sommons de 1 à $n-1$: $\displaystyle\int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{xk}(x + k - 1)} \, dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{ik}(i + k - 1)} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i + k - 1)}$.
Faisons maintenant la même chose par rapport à k.
L'application $h : y \mapsto \displaystyle\int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{xy}(x + y - 1)} \, dx$ est continue et décroissante : sur $[k, k+1]$, on a
$h(y) \leq h(k)$, puis en intégrant sur $[k, k+1]$, on a
$\displaystyle\int_k^{k+1} (\int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{xy}(x + y - 1)} \, dx) \, dy \leq h(k)$.

Sommons alors pour k allant de 1 à $n-1$:
$$\int_1^n \left(\int_1^n \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \leq \sum_{k=1}^{n-1} h(k) \leq \sum_{k=1}^{n} h(k) \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)}.$$
On obtient au final :
$$\boxed{I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \sum_{1\leq k,i\leq n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)} = q_n(a).}$$
Et avec III.1.1, $4J_n \leq q_n(a)$.

3.3. Comme $\dfrac{a}{\| a \|}$ est dans Ω_n, $q_n(\dfrac{a}{\| a \|}) \leq N(H_n)$.

Or, $q_n(\dfrac{a}{\| a \|}) = \dfrac{q_n(a)}{\| a \|^2} \geq \dfrac{4J_n}{1+\ln n}$

De plus, $J_n \sim \dfrac{\pi}{4}\ln n$ donc $\dfrac{4J_n}{1+\ln n} \sim \pi$.

De plus, par la majoration de II.2.3, on sait que $\dfrac{4J_n}{1+\ln n} \leq N(H_n) \leq \pi$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} N(H_n) = \pi.}$

PARTIE 4

1. On sait que $\lambda_{n,n} = [\widetilde{(x+n)Rn(x)}]\,(-n) = \dfrac{(-n-1)....(-n-n)}{(-n)...(-1)} = \dfrac{(n+1)...(2n)}{n....2.1} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dbinom{2n}{n}$

donc $\boxed{\lambda_{n,n} = \dbinom{2n}{n}}$

2. 2.1. Calculons $R_{n-1}(i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{k,n-1}}{i+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1,n-1}}{i+k-1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1,n-1}h_{i,k}$.

Remarque : l'énoncé ne précise pas ce qu'est $h_{i,k}$ mais on comprend bien qu'il s'agit du terme générique de la matrice (H_n), à savoir $h_{i,k} = \dfrac{1}{i+k-1}$

Si on regarde la dernière colonne de A, elle est composée des :
$$R_{n-1}(i) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k-1,n-1}h_{i,k}}_{\text{c.l. des n-1 premières colonnes de A}} + \lambda_{n-1,n-1}h_{i,n}.$$
Le déterminant étant mulitlinéaire alterné, on en déduit que le déterminant de A est celui de la matrice obtenue en remplaçant sa dernière colonne par la colonne des $\lambda_{n-1,n-1}h_{i,n}$. On peut sortir le coefficient $\lambda_{n-1,n-1}$ pour obtenir que $detA = \lambda_{n-1,n-1}det(H_n)$.

Soit encore $\boxed{detA = \dbinom{2(n-1)}{n-1} det(H_n).}$

2.2. Calculons directement les éléments de la dernière colonnes de A :

Si $i \neq n$, i est racine de R_{n-1} : $R_{n-1}(i) = 0$.

Et si $i = n$, $R_{n-1}(n) = \dfrac{(n-1)....1}{n...(2n-1)} = \dfrac{(n-1)!^2}{(2n-1)!} = \dfrac{(n-1)!^2}{(2n-2)!(2n-1)}$.

Développons alors $detA$ par rapport à sa dernière colonne :
$$detA = R_{n-1}(n)det(H_{n-1}) = \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!(2n-1)}det(H_{n-1}) = \frac{det(H_{n-1})}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}}.$$
On en déduit que $\boxed{det(H_n) = \dfrac{det(H_{n-1})}{(2n-1)[\binom{2(n-1)}{n-1}]^2}.}$

2.3. Par II.3.1, les valeurs propres de H_n sont strictement positives et comme H_n est diagonalisable, $detH_n > 0$.

On a vu aussi que $\dfrac{1}{det(H_2)} = 12$.

Par récurrence immédiate, à l'aide de IV.2.2, on en déduit que : que $\dfrac{1}{det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

3. Par simple récurrence, on obtient la forumle demandée.