Concours Communs Polytechniques 2013
Épreuve de Mathématiques n°1 – TSI

Exercice 1

1. a) On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{12}$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

   b) L'application f est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1 = \frac{1}{4}(x-2)(x+2)$$
   Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [0;2]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [2;+\infty[$.
   D'où les variations de f :

x	0		β		2		γ		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

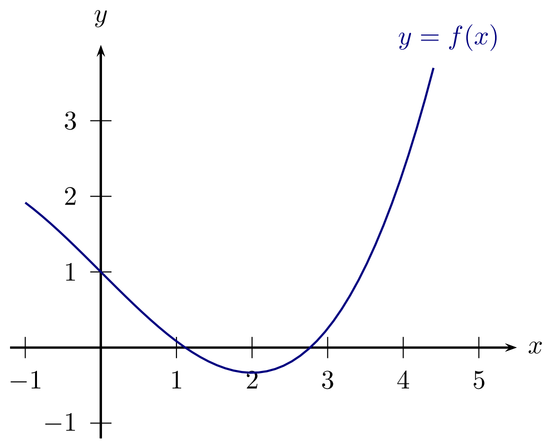
2. a) D'après le tableau de variations, f étant continue et changeant de signe à deux reprises sur les intervalles $[0;2]$ et $[2,+\infty]$, le théorème des valeurs intermédiaires indique que la fonction s'annule deux fois sur $[0;+\infty[$.

   b) $f(\beta) = 0$ donc $\dfrac{\beta^3}{12} - \beta + 1 = 0$, ce qui donne $1 + \dfrac{\beta^3}{12} = \beta$.

   c) D'après la calculatrice, $f(1) > 0$ et $f(1,2) < 0$ donc $\beta \in]1;1,2[$.
   De même, $f(2,7) < 0$ et $f(2,8) > 0$ donc $\gamma \in]2,7;2,8[$.
   REMARQUE : *Maple donne* $\beta = -2\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) \approx 1,1157$.

   d) f est donc à valeurs positives sur les intervalles $[0;\beta]$ et $[\gamma;+\infty[$, à valeurs négatives sur l'intervalle $[\beta;\gamma]$.

3. Voici le graphe représentatif de f :



   On notera la présence d'une tangente horizontale au point de coordonnées $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$.

4. a) Tout d'abord, $u_1 = \dfrac{13}{12} < \beta$.
   Raisonnons par récurrence pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0;\beta]$.

⋆ **Initialisation**
La propriété est vraie pour $n = 0$ (et même pour $n = 1$).

⋆ **Hérédité**
Supposons la propriété vraie à un rang n donné, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
u_{n+1} est clairement positif et :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12} \leqslant 1 + \frac{\beta^3}{12} = \beta$$

C'est ce que l'on souhaitait démontrer.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie quel que soit l'entier n.

b) On a directement $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^3}{12} - u_n + 1 = f(u_n)$.
Comme f est à valeurs positives sur $[0;\beta]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par β donc elle converge vers un réel $\ell \in [0;\beta]$ à déterminer. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on trouve $\ell = 1+\dfrac{\ell^3}{12}$.
Cette équation admet une seule solution sur l'intervalle $[0;\beta]$ et on a ainsi $\ell = \beta$.

d) Voici deux propositions de procédures Maple permettant de calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la première étant sans doute la plus adaptée au problème.

⋆ **Procédure récursive**

```
[>  u:=proc(n)
    if n=0 then 1 else u(n-1)^3/12+1 fi;
    end proc:
```

⋆ **Procédure itérative**

```
[>  u:=proc(n)
    local i,x;
    x:=1;
    for i from 1 to n do
       x:=x^3/12+1
    od;
    x;
   end proc:
```

Testons la procédure :

```
[> evalf(u(7));
                        1.115721147
```

On notera que la convergence vers β est très rapide : $u_7 \approx \beta$ à 10^{-4} près.

Exercice 2

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$f(x) = \frac{1}{x};\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2};\quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

De plus, on vérifie facilement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x^2 f''(x) - x(2x^2-1)f'(x) - (2x^2+1)f(x) = 0$$

Donc f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation (E).

2. a) y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et dérivable terme à terme comme somme de série entière.

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1};\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

b) En injectant dans l'équation (E), on obtient :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) &\iff x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(2x^2-1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (2x^2+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - (2x^2-1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - (2x^2+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff \sum_{n=2}^{+\infty} \left[(n^2-1)a_n - 2(n-1)a_{n-2}\right] x^n - a_0 = 0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en séries entières :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\quad (n^2-1)a_n-2(n-1)a_{n-2}=0 \text{ et } a_0=0.$$

En simplifiant par $n-1$ (non nul), on obtient : $\forall n\geqslant 2,\ a_n=\dfrac{2}{n+1}a_{n-2}$ et $a_0=0$.

c) $a_2=0$ et on montre plus généralement, par récurrence, que $a_{2p}=0$ pour tout entier naturel p.

d) Pour tout entier naturel non nul p,

$$\begin{aligned}
a_{2p+1}&=\frac{2}{2p+2}a_{2p-1}=\frac{1}{p+1}a_{2p-1}\\
&=\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{p}\cdot a_{2p-3}=\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-1}\cdot a_{2p-5}\\
&=\cdots=\frac{a_1}{(p+1)!}
\end{aligned}$$

3. Utilisons la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

Posons $u_p=\dfrac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$. Alors,

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right|=\left|\frac{x^{2p+3}}{(p+2)!}\,\frac{(p+1)!}{x^{2p+1}}\right|=\frac{x^2}{p+2}\xrightarrow[p\to+\infty]{}0<1$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$ vaut $+\infty$.

4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{p!}$ et $\mathrm{e}^{x^2}=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{p!}$. Les rayons de convergence sont infinis.

5. Tout d'abord, $g(0)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{0^{2p+1}}{(p+1)!}=0$. De plus,

$$g(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{2p-1}}{p!}=\frac{1}{x}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{p!}=\frac{1}{x}\left[\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{p!}-1\right]$$

D'où $g(x) = \dfrac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)$.

6. Les coefficients de l'équation définissant des fonctions continues sur $]0;+\infty[$ et x^2 ne s'annulant pas, l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre (E) est un plan vectoriel.
   Nous avons montré que f et g sont des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ et la famille (f,g) étant libre, elle forme une base de $\mathscr{S}$, donc toutes les solutions sont de la forme :
$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\alpha + \beta \mathrm{e}^{x^2}\right); \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

7. Toute solution sur $\mathbb{R}$ doit être de la forme :
$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{e}^{x^2}\right) \text{ si } x<0 \\ \dfrac{1}{x}\left(\alpha_2 + \beta_2 \mathrm{e}^{x^2}\right) \text{ si } x>0 \end{cases} \qquad (\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{R}^4$$
   y doit également être deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Pour que y soit définie et continue en 0, on doit avoir $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 0$.
   Sous cette condition, un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donne :
$$y(x) \underset{x\to 0^-}{=} \frac{\alpha_1}{x}\left(1 - (1 + x^2 + \mathrm{o}(x^3))\right) = -\alpha_1 x + \mathrm{o}(x^2)$$
$$y(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{\alpha_2}{x}\left(1 - (1 + x^2 + \mathrm{o}(x^3))\right) = -\alpha_2 x + \mathrm{o}(x^2)$$
   On trouve alors par unicité du développement limité $\alpha_1 = \alpha_2$.
   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme :
$$y(x) = \alpha \frac{1 - \mathrm{e}^{x^2}}{x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

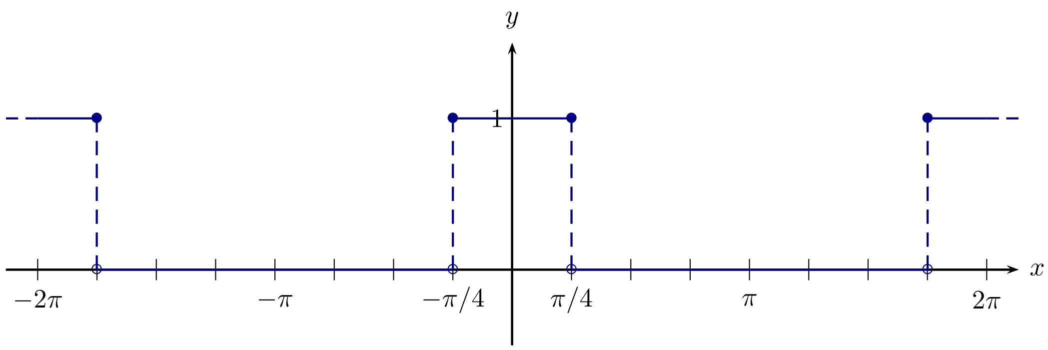
Problème

Partie A

1. Les séries $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergent alors que la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
2. Comme $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$ converge.

Partie B

1. Voici le graphe représentatif de f :



2. La fonction f étant paire, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls.
   De plus, $a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\alpha} \mathrm{d}x = \dfrac{\alpha}{\pi}$ et de même,
$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\alpha}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\sin(n\alpha)$$

3. La fonction f étant continue par morceaux, le théorème de Parseval s'applique et donne :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = a_0^2(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right),$$
   soit $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\alpha^2}{\pi^2} + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$, mais encore :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$$

4. Pour $\alpha = 1$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}$.

Partie C

1. Un simple équivalent nous donne $h(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ donc $h(x) \xrightarrow[x\to 0^*]{} 1$.
   La fonction h étant prolongeable par continuité sur $[0;1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ est *faussement* impropre, elle converge.
2. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.
   Comme pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge par comparaison.
   Le résultat de la question précédente nous permet alors d'affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
3. h est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et :
$$\forall x\in]0;+\infty[\quad h'(x) = (x\cos(x)-\sin(x))\frac{2\sin(x)}{x^3}.$$

4. On a pour tout $x>0$,
$$\begin{aligned}\left|x\sqrt{x}h'(x)\right| = \left|x\sqrt{x}(x\cos(x)-\sin(x))\frac{2\sin(x)}{x^3}\right| &\leqslant \frac{2}{x\sqrt{x}}|x\cos(x)-\sin(x)|\\ &\leqslant \frac{2}{x\sqrt{x}}(|x\cos(x)|+|\sin(x)|) \quad \text{(d'après l'inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant \frac{2}{x\sqrt{x}}(x+1)\end{aligned}$$
   Donc après simplifications, $\left|x\sqrt{x}h'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x\sqrt{x}}$.
   Mais on a également :
$$\left|x\sqrt{x}h'(x)\right| = \left|x\sqrt{x}(x\cos(x)-\sin(x))\frac{2\sin(x)}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}|x\cos(x)-\sin(x)|$$

car $|\sin(x)| \leqslant x$ comme le rappelle l'énoncé.
De plus, $|x\cos(x) - \sin(x)| \leqslant x + |\sin(x)| \leqslant 2x$, ce qui donne au final, $\left|x\sqrt{x}h'(x)\right| \leqslant 4\sqrt{x}$.

5. Comme $|x\sqrt{x}h'(x)| \leqslant 4\sqrt{x}$, pour $x \leqslant 1$, on a $|x\sqrt{x}h'(x)| \leqslant 4$ et donc $|h'(x)| \leqslant \dfrac{4}{x\sqrt{x}}$.
De plus, pour $x \geqslant 1$, $\left|x\sqrt{x}h'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x\sqrt{x}} \leqslant 2+2 = 4$ et on retrouve $|h'(x)| \leqslant \dfrac{4}{x\sqrt{x}}$.
Au final, quel que soit $x > 0$, $|h'(x)| \leqslant \dfrac{4}{x\sqrt{x}}$.

6. Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et effectuons un changement de variable en posant $x = n\alpha + t$ (changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$) :
$$\int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
Ainsi, grâce à la relation de Chasles,
$$\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N}\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
De plus,
$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t - \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}\end{aligned}$$
En sommant, on obtient à l'aide du résultat précédent :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right)\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} \\ &= \int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}\end{aligned}$$
On a donc bien montré que :
$$\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right)\mathrm{d}t$$

7. Rappelons que si h est continue et dérivable sur un intervalle I, alors :
$$\forall x, y \in \mathring{I} \quad \exists c \in]x;y[\quad h(y) - h(x) = h'(c)(y-x)$$
Il s'agit du théorème des accroissements finis. On peut appliquer ce résultat sur l'intervalle $]0;+\infty[$ en posant $x = n\alpha$ et $y = n\alpha + t$ qui sont deux éléments de I, pour $t \in [0;\alpha]$. On a alors :
$$\left|\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right| = |h'(c)|t \leqslant \frac{4t}{c\sqrt{c}}$$
avec $c \in]n\alpha; n\alpha+t[$ d'après la question 5. Enfin, comme $c \geqslant n\alpha$,
$$\left|\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right| \leqslant \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}$$

8. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors :

$$\int_0^\alpha \left|\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}-\frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^\alpha \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}}$$

Il ne reste plus qu'à sommer les inégalités pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}-\frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right) \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

9. Tout d'abord, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^{(N+1)\alpha}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}-\frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\int_0^\alpha \left|\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}-\frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\sqrt{n}}\end{aligned}$$

en appliquant successivement l'inégalité triangulaire, l'inégalité de la moyenne puis le résultat de la question précédente.
Les séries et l'intégrale apparaissant dans l'expression précédente étant toutes convergentes, on peut passer à la limite. Comme on a montré que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$, on obtient :

$$\left|\int_\alpha^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\pi-\alpha}{2}\right| \leqslant 2\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

En faisant alors tendre α vers 0, on obtient finalement (théorème de comparaison) :

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\left[\int_\alpha^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\pi-\alpha}{2}\right]=0 \quad\text{soit}\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

FIN DE L'ÉPREUVE