

## Partie A : un arc de cercle apparent

1. On a  $d(O, M(\theta)) = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$  donc  $M(\theta)$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .
2. (a) Comme  $a \in ]1, +\infty[$ , on a  $\frac{1}{a} \in ]0, 1[$ . Comme Arccos réalise une bijection (continue et strictement décroissante) entre  $]0, 1[$  et  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , on en déduit l'existence de  $\omega$  avec  $\omega \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .
- (b) Les coordonnées de  $\overrightarrow{OM}(\omega)$  sont :

$$\begin{aligned} x_M &= \cos(\omega) = \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} \\ y_M &= \sin(\omega) = \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{1 - \cos^2\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right)\right)} \quad (\sin(\omega) > 0 \text{ car } a \in ]0, \frac{\pi}{2}[) \end{aligned}$$

Après simplification on obtient :

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{a} \\ y_M = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{cases}$$

D'où les coordonnées de  $\overrightarrow{AM}(\omega)$  :

$$\begin{cases} x_M - x_A = \cos(\omega) - a = \frac{1}{a} - a = \frac{1}{a}(1 - a^2) \\ y_M - y_A = \sin(\omega) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{cases}$$

- (c) On vient de voir que  $\cos(\omega) = \frac{1}{a}$ , ce qui donne immédiatement :

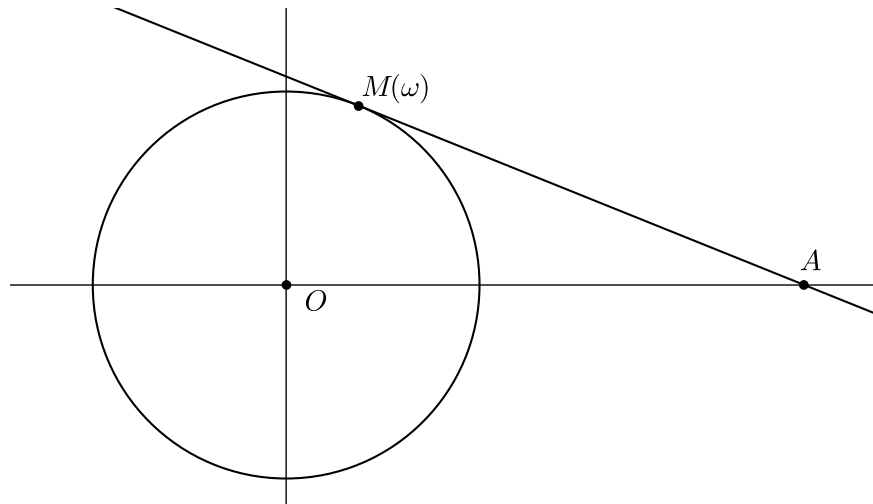
$$a = \frac{1}{\cos(\omega)}$$

- (d) Pour vérifier que  $(AM(\omega))$  est tangente au cercle  $\mathcal{C}$ , nous allons démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}(\omega)$  et  $\overrightarrow{OM}(\omega)$  sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AM}(\omega) \cdot \overrightarrow{OM}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}(1 - a^2) \\ \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}(1 - a^2) + \frac{1}{a^2}(a^2 - 1) = 0$$

Ainsi,

$$(AM(\omega)) \text{ est tangente au cercle } \mathcal{C}$$



3. (a) Comme  $\cos(x) \in ]-1, 1[$  et  $a > 1$ , on a toujours  $\cos(x) - a < 0$ . Le quotient a donc bien un sens et

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$

Par ailleurs, les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  (et même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ), on en déduit par opérations algébriques que

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$

- (b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x) - a} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x) - a} = -f(x)$$

Ainsi,

$f$  est impaire

**Remarque.** On peut donc réduire l'étude de  $f$  à  $\mathbb{R}^+$ . On obtiendra ensuite toute la courbe en faisant une symétrie par rapport à l'origine.

- (c) On dérive comme un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)[\cos(x) - a] - \sin(x)[- \sin(x)]}{(\cos(x) - a)^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) - a \cos(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x) - a)^2} \\ &= \frac{1 - a \cos(x)}{(\cos(x) - a)^2} \end{aligned}$$

- (d) Le dénominateur étant strictement positif, le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1 - a \cos(x)$ , c'est à dire celui de  $\frac{1}{a} - \cos(x)$ . La fonction  $\cos$  étant décroissante sur  $[0, \pi]$ , pour tout  $x \in [0, \pi]$ , on

a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \cos(x) > 0 &\iff \frac{1}{a} > \cos(x) \\ &\iff \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{a}\right) < x \\ &\iff \omega < x \end{aligned}$$

Ainsi,

$f$  est strictement décroissante sur  $[0, \omega]$  et strictement croissante sur  $[\omega, \pi]$ .

(e) En complétant par imparité, on obtient le tableau de variations suivant :

$x$	$-\pi$	$-\omega$	$0$	$\omega$	$\pi$
$f(x)$	0	$-f(\omega)$	0	$f(\omega)$	0

4. La droite verticale passant par  $A$  ne coupe pas le cercle  $\mathcal{C}$  (car la distance entre cette droite et  $\mathcal{C}$  vaut  $a - 1 > 0$ ). Toutes les autres droites passant par  $A$  ont une équation de la forme  $y = mx + p$ , ce qui est le cas de la droite  $\mathcal{D}$ . Comme elle passe par  $A$  on a  $y_A = mx_A + p$  ce qui donne facilement  $p = -ma$ . La droite  $\mathcal{D}$  a donc une équation de la forme :

$$y = m(x - a) \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

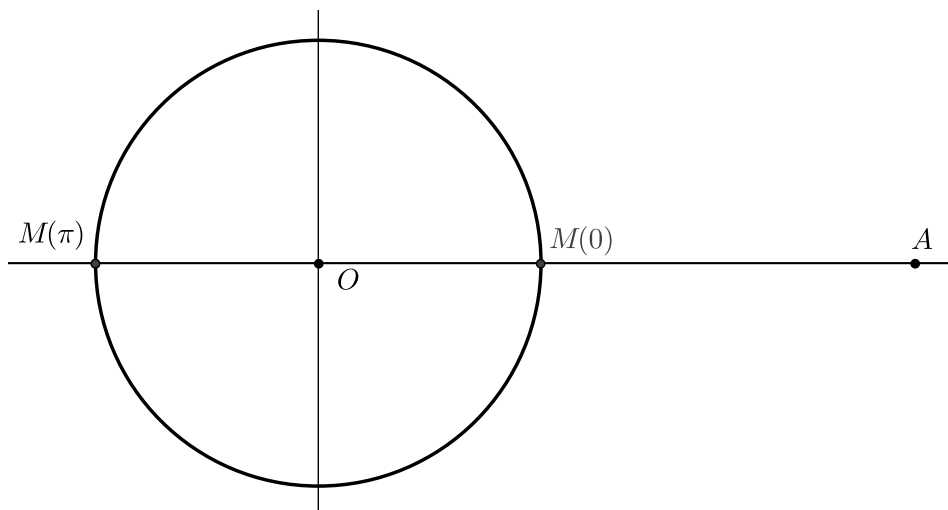
5. Pour tout  $(m, \theta) \in \mathbb{R}^2$  on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M(\theta) \in \mathcal{D}_m &\iff \sin(\theta) = m(\cos(\theta) - a) \\ &\iff m = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - a} \\ &\iff m = f(\theta) \end{aligned}$$

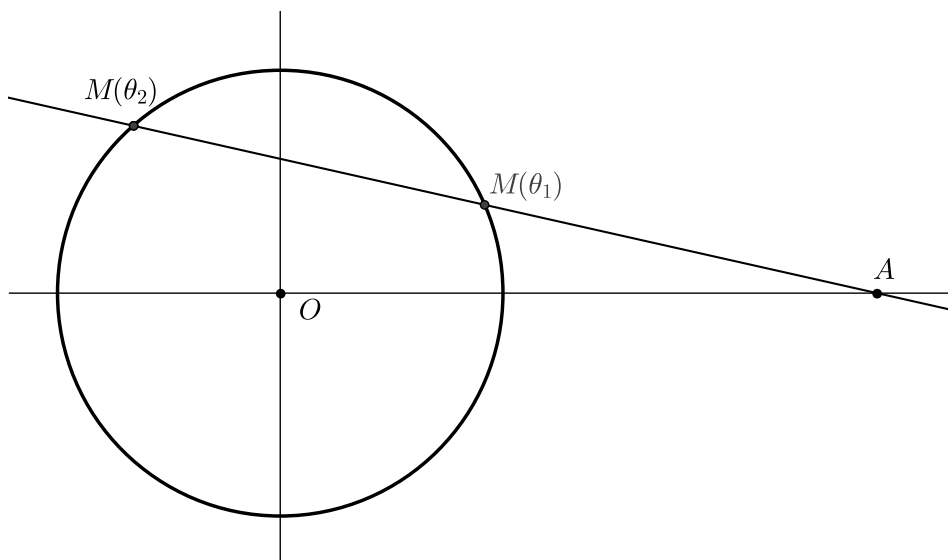
6. Le point  $M(0)$  a pour coordonnées  $(1, 0)$  et le point  $M(\pi)$  a pour coordonnées  $(-1, 0)$ . Ces deux points sont évidemment sur la droite  $\mathcal{D}_0$  d'équation  $y = 0$ .

Ces deux points sont les seuls points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}_0$ . Comme  $-1 \leq 1$  (abscisses des deux points), on en déduit, par définition, que :

$M(0)$  est visible du point  $A$  alors que  $M(\pi)$  ne l'est pas



7. (a) Notons  $m = f(\theta_1) = f(\theta_2)$ . D'après le résultat de la question 5, on a d'une part  $m = f(\theta_1)$  donc  $M(\theta_1) \in \mathcal{D}_m$  et d'autre part  $m = f(\theta_2)$  donc  $M(\theta_2) \in \mathcal{D}_m$ . Comme par définition on a aussi  $A \in \mathcal{D}_m$ , la droite  $\mathcal{D}_m$  contient les trois points  $A$ ,  $M(\theta_1)$  et  $M(\theta_2)$  ce qui prouve qu'ils sont alignés.
- (b) D'une part  $M(\theta_1)$  et  $M(\theta_2)$  sont les deux seuls points d'intersection de la droite  $\mathcal{D}_m$  avec  $\mathcal{C}$ . D'autre part, on a  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$  et la fonction  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  donc  $\cos(\theta_1) > \cos(\theta_2)$ . Comme les nombres  $\cos(\theta_1)$  et  $\cos(\theta_2)$  sont respectivement les abscisses des points  $M(\theta_1)$  et  $M(\theta_2)$ , cela prouve, par définition que  $M(\theta_1)$  est visible du point  $A$  et que  $M(\theta_2)$  ne l'est pas.



- (c) La fonction  $f$  étant strictement décroissante sur  $[0, \omega]$ , l'égalité  $f(\theta_1) = f(\theta_2)$  fait qu'il est impossible d'avoir  $\theta_2 \leq \omega$  (sinon on aurait deux éléments de  $[0, \omega]$  ayant la même image et  $f$  ne serait plus injective). On a donc  $\theta_2 > \omega$ .

De même,  $f$  étant strictement croissante sur  $[\omega, \pi]$ , l'égalité  $f(\theta_1) = f(\theta_2)$  fait qu'il est impossible d'avoir  $\theta_1 \geq \omega$  (sinon on aurait deux éléments de  $[\omega, \pi]$  ayant la même image et  $f$  ne serait plus injective). On a donc  $\theta_1 < \omega$ .

Pour conclure, on a donc :

$$\boxed{\theta_1 < \omega < \theta_2}$$

8. (a) Si  $\theta = \omega$ , alors la droite  $\mathcal{D}_m$  est tangente au cercle  $\mathcal{C}$  (d'après le résultat de la question 2.d) : comme il n'y a qu'un seul point d'intersection entre la droite et le cercle, le point d'intersection est évidemment visible du point  $A$  dans ce cas.

On suppose maintenant que  $\theta < \omega$ .

À la lecture du tableau de variation, on a donc  $m = f(\theta) > f(\omega)$ .

Toujours à la lecture du tableau de variation, l'équation  $f(\theta) = m$  possède exactement deux solutions dans  $[0, \pi]$  :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta \in [0, \omega[ \\ \theta_2 \in ]\omega, \pi] \end{cases}$$

Les deux seuls points d'intersection entre la droite  $(AM(\theta))$  et le cercle  $\mathcal{C}$  sont  $M(\theta_1) = M(\theta)$  et  $M(\theta_2)$ . Comme  $0 \leq \theta_1 < \omega < \theta_2 \leq \pi$ , on en déduit d'après le résultat de la question 7.b que

le point  $M(\theta) = M(\theta_1)$  est visible du point  $A$ .

- (b) On raisonne de manière analogue en posant  $m = f(\theta) > f(\omega)$ .

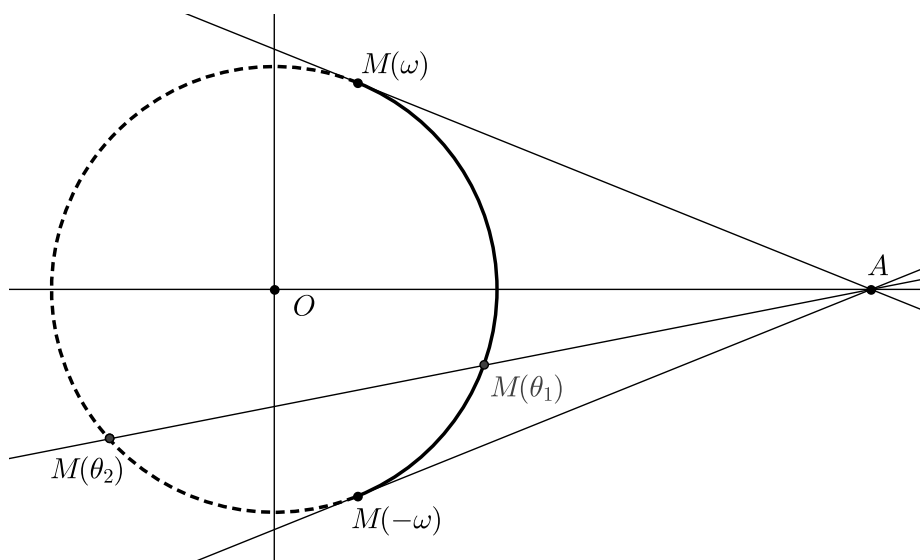
À la lecture du tableau de variation, l'équation  $f(\theta) = m$  possède exactement deux solutions dans  $[0, \pi]$  :

$$\begin{cases} \theta_1 \in [0, \omega[ \\ \theta_2 = \theta \in ]\omega, \pi] \end{cases}$$

Les deux seuls points d'intersection entre la droite  $(AM(\theta))$  et le cercle  $\mathcal{C}$  sont  $M(\theta_1)$  et  $M(\theta_2) = M(\theta)$ . Comme  $0 \leq \theta_1 < \omega < \theta_2 \leq \pi$ , on en déduit d'après le résultat de la question 7.b que

le point  $M(\theta) = M(\theta_2)$  n'est pas visible du point  $A$ .

9. Par symétrie on peut facilement voir que :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \in [-\omega, 0] \text{ alors } M(\theta) \text{ est visible depuis le point } A ; \\ \text{si } \theta \in [-\pi, -\omega[ \text{ alors } M(\theta) \text{ n'est pas visible depuis le point } A . \end{cases}$$


## Partie B : un contour apparent d'une quadrique

$$1. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \left(1 - \lambda - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \lambda + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)$$

et :

$$\boxed{\text{Sp}(S) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}}$$

2. (a)  $R$  est une matrice symétrique réelle.

D'après le théorème spectral,  $R$  est donc diagonalisable par le biais d'une matrice orthogonale, autrement dit, il existe une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et une matrice  $\Omega \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  orthogonale, telles que  $D = \Omega^{-1}R\Omega$ .

Or  $\Omega$  est orthogonale, donc  $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$ . Finalement :

$$\boxed{D = {}^t\Omega R \Omega}$$

$$(b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_R(\lambda) = \det(R - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la 1ère colonne}$$

$$= (3 - \lambda) \cdot \left[ (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} \right] = (3 - \lambda) \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \left( \lambda - \frac{3}{2} \right) \quad \text{d'après la question 1.}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(R) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3 \right\}}$$

On peut donc prendre :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Déterminons alors  $E_{\frac{1}{2}} = \ker(R - \frac{1}{2}I_3)$  :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}} &\Leftrightarrow (R - \frac{1}{2}I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On sait que  $\frac{1}{2}$  est une valeur propre d'ordre de multiplicité 1 donc  $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$ .

De plus,  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}$  donc  $E_{\frac{1}{2}} = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Comme on cherche une matrice  $\Omega$  orthogonale, il faut normer le vecteur propre précédent. Soit :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \text{vect}(\vec{e}_1)$$

**Remarque.** La question est ambiguë : il est difficile de savoir si les correcteurs attendent les détails pour la recherche d'un sous-espace propre, ou si le fait d'expliquer comment on fait avec la calculatrice suffit ...

On détermine de même les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\frac{3}{2}$  et 3.

Ceci peut se faire à l'aide de la calculatrice, en utilisant par exemple la TI nspire CAS :

- On saisit la matrice à l'aide de l'éditeur graphique, dans la variable  $R$ .
- On tape "eigVl(R)", puis "eigVc(R)". La calculatrice donne alors les valeurs propres, puis les vecteurs propres correspondants.
- En identifiant 0.707107 à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , on pose donc :

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et on a : } E_{\frac{3}{2}} = \text{vect}(\vec{e}_2)$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et on a : } E_3 = \text{vect}(\vec{e}_3)$$

**Remarque.** Il est par ailleurs très facile de voir que  $R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc  $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

**Conclusion.** On a  $D = {}^t\Omega R\Omega$  avec

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit la forme quadratique  $q : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\mathcal{E}_3$  est l'espace euclidien orienté de l'énoncé.  
 $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \mapsto 3x^2 + y^2 - yz + z^2$

dien orienté de l'énoncé.

**Remarque.**  $(x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 - yz + z^2$  est un polynôme homogène de degré 2, donc  $q$  est bien une forme quadratique.

Soit  $M$  le point de  $\mathcal{E}_3$  tel que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\Sigma$  a pour équation  $q(\vec{OM}) = 1$ .

La matrice de  $q$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est  $R$ .

Plaçons nous dans le repère  $\mathcal{R}' = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

D'après les formules de changement de base pour la matrice d'une forme quadratique, la matrice de  $q$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est  ${}^t\Omega R\Omega = D$ , car  $\Omega$  est la matrice de passage de  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Si on note  $(X, Y, Z)$  les coordonnées de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ , une équation de  $\Sigma$  est alors :

$$\begin{aligned} q(\vec{OM}) &= 1 \\ \Leftrightarrow {}^t \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 + 3Z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ ,

$\Sigma$  est un ellipsoïde.

4. (a)  $M \in \mathcal{E} \iff M$  est à la fois dans le plan  $\mathcal{P}$  et sur  $\Sigma$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + y^2 - yz + z^2 = 1 \end{cases}$$



$$\text{Ainsi, } M \in \mathcal{E} \iff \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3} \end{cases}}$$

(b) Soit  $O'(\frac{1}{3}, 0, 0)$  et  $\mathcal{R}_2 = (O'; \vec{j}, \vec{k})$  un repère de  $\mathcal{P}$ .

Dans  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{E}$  a pour équation  $y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3}$  de la forme  $ay^2 + bz^2 + cyz + dy + ez = f$  :  $\mathcal{E}$  est donc une conique, éventuellement dégénérée.

Soit la forme quadratique  $q_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $y\vec{j} + z\vec{k} \mapsto y^2 - yz + z^2$  (polynôme homogène de degré 2)

La matrice de  $q_2$  dans la base  $(\vec{j}, \vec{k})$  est  $S$ .

On a vu que  $\text{Sp}(S) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$ .

Chaque valeur propre étant de multiplicité 1, les sous-espaces propres  $E_{\frac{1}{2}}(S)$  et  $E_{\frac{3}{2}}(S)$  sont de dimension 1.

Appelons  $\vec{J}$  et  $\vec{K}$  des vecteurs propres normés tels que  $E_{\frac{1}{2}}(S) = \text{vect}(\vec{J})$  et  $E_{\frac{3}{2}}(S) = \text{vect}(\vec{K})$ ,

la matrice de  $q_2$  dans la base  $(\vec{J}, \vec{K})$  est  $D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ .

La matrice  $S$  étant symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux. Il en résulte que la famille  $(\vec{J}, \vec{K})$  est orthonormale (donc libre).  $\mathcal{P}$  étant un plan,  $(O'; \vec{J}, \vec{K})$  est donc un repère orthonormé de  $\mathcal{P}$ .

$\mathcal{E}$  a pour équation  $y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3}$  dans  $\mathcal{R}_2$ , ce qui équivaut à  $q_2(\vec{OM}) = \frac{2}{3}$  en notant  $(y, z)$  les coordonnées de  $M$  dans  $\mathcal{R}_2$ .

Notons alors  $(Y, Z)$  les coordonnées de  $M$  dans  $(O'; \vec{J}, \vec{K})$ . Dans le repère  $(O'; \vec{J}, \vec{K})$ ,  $\mathcal{E}$  a pour équation :  ${}^t \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \cdot D_2 \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \iff \frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 = \frac{2}{3}$

$$\iff \boxed{\frac{3}{4}Y^2 + \frac{9}{4}Z^2 = 1} \text{ en multipliant par } \frac{2}{3}$$

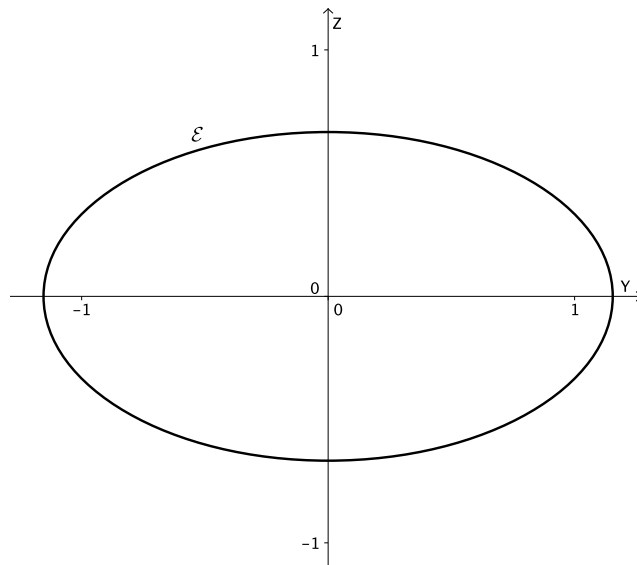
(c)  $\mathcal{E}$  a une équation de la forme  $\frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$  avec  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$  et  $b = \frac{2}{3}$ . (On a bien  $a > b$ )

$\mathcal{E}$  est une ellipse de centre  $O'$ , de grand axe  $[\alpha\alpha']$  où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont les sommets de coordonnées  $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$  et  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$  dans le repère  $(O'; \vec{J}, \vec{K})$ .

### Remarques.

◇ Pour la construction de  $\mathcal{E}$ , on connaît également le petit axe  $[\beta\beta']$  où  $\beta$  et  $\beta'$  sont les points de coordonnées  $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$  et  $\left(0, \frac{2}{3}\right)$  dans le repère  $(O'; \vec{J}, \vec{K})$ .

◇  $\frac{2}{\sqrt{3}} \simeq 1,2$



**Remarque.** La surface d'équation  $y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3}$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un cylindre elliptique de direction  $(Ox)$ .  $\mathcal{E}$  est une section droite de ce cylindre.

5. (a)  $3x_N^2 + y_N^2 - y_N z_N + z_N^2 = 3 \times 0^2 + 0 - 0 \times 1 + 1^2 = 1$ , donc :

$$\boxed{N \in \Sigma}$$

(b)  $\vec{NA}$  a pour coordonnées  $(1, 0, -1)$ .

Il en résulte que  $(NA) = N + \text{vect}(\vec{NA})$  a pour équations paramétriques :

$$\boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

(c)  $M(x, y, z) \in (NA) \cap \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} 3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1 \\ x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \\ 3\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \\ 4\lambda^2 - 2\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \\ \lambda(2\lambda - 1) = 0 \end{cases}$$

D'où  $M(x, y, z) \in (NA) \cap \Sigma \Leftrightarrow M(0, 0, 1) = N$  ou  $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

**Conclusion.**  $(NA)$  coupe la surface  $\Sigma$  en  $N$  et au point  $M'\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ .

Comme  $\frac{1}{2} > 0$ , on a trouvé un point  $M'$ , point d'intersection de  $\Sigma$  avec  $(AN)$  qui vérifie  $x_{M'} > x_N$ , donc

$N$  n'est pas visible du point  $A$ .

6.

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \vec{\text{grad}} \phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v, w) \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v, w) \\ \frac{\partial \phi}{\partial w}(u, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix}$$

7. (a)  $3x_B^2 + y_B^2 - y_B z_B + z_B^2 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}$   
 $= \frac{3+6}{9} = 1$ , donc :

$B \in \Sigma$

(b)  $\Sigma$  a pour équation  $\phi(x, y, z) = 0$ .

$B \in \Sigma$  et  $\vec{\text{grad}} \phi(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ , donc

$\vec{\text{grad}} \phi(B)$  dirige la normale au plan tangent à  $\Sigma$  en  $B$ .

Ainsi,  $M(x, y, z) \in \Pi_B \Leftrightarrow \vec{BM} \cdot \vec{\text{grad}} \phi(B) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3} \\ y - \frac{\sqrt{2}}{3} \\ z + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) - \sqrt{2}\left(z + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{2}{3} + \sqrt{2}y - \frac{2}{3} - \sqrt{2}z - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 2$$

(c)  $2x_A + \sqrt{2}y_A - \sqrt{2}z_A = 2 + 0 - 0 = 2$ , donc

$$\boxed{A \in \Pi_B}$$

Comme  $A$  appartient au plan tangent à la surface  $\Sigma$  en  $B$ , d'après l'énoncé,

$$\boxed{B \in \Gamma}$$

$$8. \vec{\text{grad}} \phi(T) = \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ si et seulement si } u = v = w = 0.$$

Or  $(0, 0, 0) \notin \Sigma$ , donc tous les points de  $\Sigma$  sont réguliers.

De la même manière qu'à la question 7.(b),

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \Pi_T &\Leftrightarrow \vec{TM} \cdot \vec{\text{grad}} \phi(T) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \\ z - w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6u \\ 2v - w \\ -v + 2w \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 6u(x - u) + (2v - w)(y - v) + (-v + 2w)(z - w) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6ux - 6u^2 + (2v - w)y - 2v^2 + vw + (-v + 2w)z + vw - 2w^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6ux + (2v - w)y + (-v + 2w)z - 6u^2 - 2v^2 + 2vw - 2w^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6ux + (2v - w)y + (-v + 2w)z - 2 \underbrace{(3u^2 + v^2 - vw + w^2)}_{=1 \text{ car } T \in \Sigma} = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{6ux + (2v - w)y + (2w - v)z = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. T(u, v, w) \in \Gamma &\Leftrightarrow \begin{cases} T \in \Sigma \\ A \in \Pi_T \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} T \in \Sigma \\ 6u \times 1 + 0 + 0 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 + v^2 - vw + w^2 = 1 \\ u = \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow T \in \mathcal{P} \cap \Sigma = \mathcal{E} \end{aligned}$$

**Conclusion.**

$$\boxed{\Gamma = \mathcal{E}}$$

Rédigé par :

Pierre Béjia, TSI 2, Lycée Antonin Artaud, Marseille  
 et  
 Frédérique Evrard, TSI 2, Lycée Rouvière, Toulon.