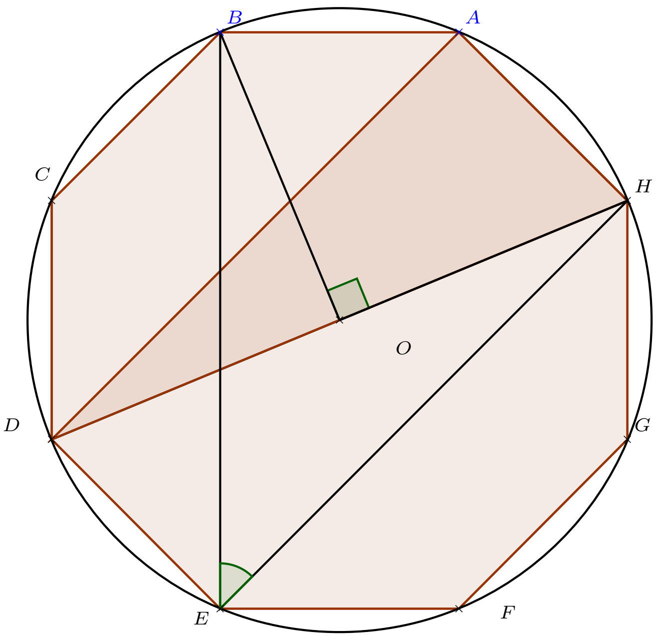
Math93.com
MathExams.fr

Brevet des Collèges
DNB 2014 Métropole

Jeudi 26 Juin 2014
Correction

Exercice 1. 5 points

1. Reproduire l'octogone régulier.
Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle.



2. Démontrer que le triangle DAH est rectangle.

- Les angles au centre d'un octogone régulier sont tous de même mesure donc chacun mesure :

$$\boxed{\widehat{HOA} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ}$$

- On sait que :

$$\widehat{HOD} = 4 \times \widehat{HOA} = 4 \times 45^\circ = 180^\circ$$

Par conséquent, les points H, O et D sont alignés et [HD] est un diamètre du cercle. Or par théorème :

Théorème 1

Si un point M appartient à un cercle de diamètre [AB], en étant distinct des points A et B,
Alors le triangle AMB est rectangle en M.

Or ici le point A est un point de cercle de diamètre [HD], distinct de H et de D, donc d'après le théorème 1 donc **le triangle HAD est rectangle en A**.

3. Calculer le mesure de l'angle $\widehat{BEH}$. L'angle au centre $\widehat{BOH}$ est de mesure :

$$\widehat{BOH} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

Cet angle au centre $\widehat{BOH}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{BH}$ que l'angle inscrit $\widehat{BEH}$. Or la mesure de l'angle inscrit est la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc soit : Par conséquent

$$\boxed{\widehat{BEH} = \frac{\widehat{BOH}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ}$$

Exercice 2. 6 points

1. Soit x le prix d'un cahier :

- **Dans les magasins A et B** : le prix d'un cahier est de x euros.
- **Dans le magasin C** : car après une réduction de 30%, il reste 70% du prix à payer soit $70\% \times x = 0,7x$. Le prix unitaire d'un cahier est donc de $0,7\,x$ euros.

  Or puisque que le prix x est un nombre positif on a :

  $$0,7\,x \leq x$$

  et donc **le magasin C est le plus intéressant si on achète un seul cahier**.

2. 2. a. Si on achète 2 cahiers :

- **Dans le magasin A** : le prix des deux cahiers est de $2\,x$ euros.
- **Dans le magasin B** : le prix des deux cahiers est de $1\,x + 0,5\,x = 1,5\,x$ euros car le deuxième cahier est à moitié prix
- **Dans le magasin C** : le prix des deux cahiers est de $2 \times 0,7\,x = 1,4\,x$ euros.
  Or puisque que le prix x est un nombre positif on a :

  $$1,4\,x \leq 1,5\,x \leq 2\,x$$

  et donc **le magasin C est le plus intéressant si on achète deux cahiers**.

2. b. Si on achète 3 cahiers :

- **Dans le magasin A** : le prix d'un lot de trois cahiers est de $2\,x$ euros car on paye trois cahier pour le prix de deux ;
- **Dans le magasin B** : le prix des trois cahiers est de $1,5x + 1x = 2,5\,x$ euros soit le prix de deux cahiers plus un ;
- **Dans le magasin C** : le prix des trois cahiers est de $3 \times 0,7\,x = 2,1\,x$ euros.
  Or puisque que le prix x est un nombre positif on a :

  $$2\,x \leq 2,1x \leq 2,5x$$

  et donc **le magasin A est le plus intéressant si on achète trois cahiers**.

3. Quel pourcentage de réduction totale Léa va-t-elle obtenir ?

- Puisqu'elle achète un cahier, Léa va choisir le magasin C et donc payer avant réduction $0,7\,x$ euros.
- Effectuer une baisse de 10% c'est multiplier le prix par

  $$1 - 10\% = \frac{100 - 10}{100} = \frac{90}{100} = 0,9$$

- Elle paye donc après 10% de réduction, $90\% = 0,9$ du prix soit :

  $$0,9 \times 0,7P = 0,63P$$

  Or

  $$0,63 = \frac{63}{100} = \frac{100 - 37}{100} = 1 - \frac{37}{100}$$

  Elle va donc obtenir une **réduction de 37%**.

Exercice 3. 5 points

1. Programme de calcul.

- **On soustrait 6** : soit $(8-6)=2$;
- **On soustrait 2** : soit $(8-2)=6$;
- **On multiplie les deux résultats** : soit $(8-6)\times(8-2)=12$;

Si on choisit 8, on obtient comme résultat :

$$\boxed{(8-6)\times(8-2)=12}$$

2. Vrai ou Faux

- **Proposition 1**

Proposition 1 (Vraie)

Le programme peut donner un résultat négatif.

Si on prend le nombre 5, on obtient un résultat négatif :

$$(5-6)\times(5-2)=-3<0$$

- **Proposition 2**

Proposition 2 (Vraie)

Si on choisit $\dfrac{1}{2}$ comme nombre de départ, le programme donne $\dfrac{33}{4}$ comme résultat.

  – **On soustrait 6** : soit $\left(\dfrac{1}{2}-6\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{12}{2}=-\dfrac{11}{2}$;
  – **On soustrait 2** : soit $\left(\dfrac{1}{2}-2\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{2}=-\dfrac{3}{2}$;
  – **On multiplie les deux résultats** : soit $\left(-\dfrac{11}{2}\right)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{33}{4}$;

- **Proposition 3**

Proposition 3 (Vraie)

Le programme donne 0 comme résultat pour exactement deux nombres.

On peut reprendre le programme en prenant x comme nombre de départ :

  – **On soustrait 6** : soit $(x-6)$;
  – **On soustrait 2** : soit $(x-2)$;
  – **On multiplie les deux résultats** : soit $\boxed{(x-6)\times(x-2)}$;

Donc on cherche les valeurs de x telles que $(x-6)\times(x-2)=0$ qui est une équation produit. Or par théorème :

Théorème 2

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

soit

$$(x-6)\times(x-2)=0 \iff x-2=0 \text{ ou } x-6=0$$
$$(x-6)\times(x-2)=0 \iff x=2 \text{ ou } x=6$$

L'équation produit a deux solutions distinctes, 2 et 6 qui correspondent aux nombres qui donnent 0 comme résultat par le programme, l'affirmation est donc vraie.

- **Proposition 4**

Proposition 4 (Fausse)

La fonction qui, au nombre choisi au départ, associe le résultat du programme est une fonction linéaire.

On a vu que la fonction associée au programme est :

$$f(x)=(x-6)(x-2)$$

- **Méthode 1**
  L'image, par une fonction linéaire de 0 est toujours 0 or ici si 0 est choisi comme nombre de départ :

$$f(0)=(0-6)\times(0-2)=12\neq 0$$

  La fonction f n'est pas une fonction linéaire.
- **Méthode 2**
  Après développement on a :

$$f(x)=(x-6)(x-2)=x^2-2x-6x+12$$
$$\boxed{f(x)=x^2-8x+12}$$

  La fonction f n'est pas une fonction linéaire car elle n'est pas de la forme $x\longmapsto a\,x$.

Exercice 4. 3 points

1. Simulation des tirages.

1. a. Quelle est la couleur la plus présente dans le sac ?
La fréquence correspondant au jeton jaune étant sur le long terme la plus grande, c'est donc **la couleur jaune qui est la plus fréquente dans le sac**.

1. b. Quelle formule a-t-il saisie dans la cellule C2 avant de la recopier vers le bas ?
La formule à saisir dans la cellule C2 avant de la recopier vers le bas est :

$$\boxed{=B2/A2}$$

2. On sait que la probabilité de tirer un jeton rouge est de $\frac{1}{5}$. Combien y a-t-il de jetons rouges dans le sac ?
Il y a 20 jetons dans le sac or

$$\frac{1}{5}\times 20=\frac{20}{5}=4$$

Donc il y a **4 jetons rouge dans le sac**.

Exercice 5. QCM — 4 points

- **Question 1** : $\boxed{\textbf{Réponse d} : 8}$

Propriété 1

Quand on multiplie les longueurs par un réel k positif, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

Donc quand on double le rayon d'une boule, on multiplie les longueurs par $k = 2$ et donc son volume par $k^3 = 2^3 = 8$.

- **Question 2** : $\boxed{\textbf{Réponse a} : 10 \text{ m.s}^{-1}}$

Une vitesse de 36 km.h^{-1} correspond à parcourir une distance de 36 km = 36 000 m en 1 heure soit en 3 600 s donc :

Distance (en m)	36 000 m	d ?
Temps (en seconde)	3 600 s	1 s

Cela revient donc à parcourir en 1 seconde la distance de

$$d = \frac{36000 \times 1}{3600} = 10 \text{ m}$$

Donc

$$\boxed{v = 36 \text{ km.h}^{-1} = 10 \text{ m.s}^{-1}}$$

- **Question 3** : $\boxed{\textbf{Réponse c} : \sqrt{21}}$

Puisque $5 = \sqrt{25}$, diviser $\sqrt{525}$ par 5 c'est le diviser par $\sqrt{25}$ soit :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{525}}{5} &= \frac{\sqrt{525}}{\sqrt{25}} \\ &= \sqrt{\frac{525}{25}} \\ \frac{\sqrt{525}}{5} &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

- **Question 4** : $\boxed{\textbf{Réponse a} : 25}$

On sait que 1 To $= 10^{12}$ octets et que 1 Go $= 10^9$ octets donc

$$1 \text{ To} = \frac{10^{12}}{10^9} = 10^3 \text{ Go}$$

donc un disque dur de $1,5$ To $= 1,5 \times 10^3$ Go peut se partager en N dossier de 60 Go avec

$$\boxed{N = \frac{1,5 \times 10^3}{60} = 25}$$

Exercice 6. 6 points

1. Vérifier que les feux de croisement de Pauline sont réglés avec une inclinaison égale à 0,014.

D'après les données on a :

- $QK = QC - KC = 0,65 - 0,58 = 0,07$ m ;
- $QP = 5$ m.

Donc

$$\boxed{\frac{QK}{QP} = \frac{0,07}{5} = 0,014}$$

Les feux de croisement de Pauline sont réglés avec une **inclinaison égale à 0,014**.

2. Donner une mesure de l'angle $\widehat{QPK}$ correspondant à l'inclinaison.

Le triangle QPK est rectangle en Q donc :

$$\tan\widehat{QPK} = \frac{QK}{QP} = 0,014$$

soit arrondi au dixième

$$\boxed{\widehat{QPK} = \arctan 0,014 \approx 0,8^\circ}$$

3. Quelle est distance AS d'éclairage des feux ?

Le quadrilatère APQC est un rectangle car il a 3 angles droits (donc quatre), de ce fait les angles $\widehat{SPA}$ et $\widehat{SPQ}$ sont complémentaires soit

$$\widehat{APQ} = 90^\circ = \widehat{SPA} + \widehat{SPQ}$$

d'où :

$$\widehat{SPA} = 90 - \widehat{QPK} \approx 89,2^\circ$$

Par conséquent dans le triangle APS rectangle en A on a :

$$\tan\widehat{SPA} = \frac{AS}{AP}$$

soit

$$\boxed{AS \approx 0,65 \times \tan 89,2 \approx 47 \text{ m}}$$

Remarque : Si on veut conserver les valeurs exactes jusqu'au bout on a :

$$AS = 0,65 \times \tan\left(90^\circ - \arctan 0,014\right) \approx 46 \text{ m}$$

Les résultats sont alors sensiblement différents du fait de l'approximation faite de l'angle $\widehat{QPK}$ à la question précédente. **La valeur de 46 m étant la valeur la plus proche**.

Exercice 7. 7 points

1. Justifier que le prix d'une botte de paille est de 0,51 € (arrondi au centime).

- **Volume d'une botte de paille.**
  La botte de paille est assimilé à un pavé droit de dimensions 90 cm, 45 cm et 35 cm donc son volume s'obtient par le produit des longueur, largeur et hauteur soit :

$$0,9 \times 0,45 \times 0,35 = 0,14175 \text{ m}^3$$

- **Masse d'une botte de paille.**
  On sait que 1 m^3 de paille a une masse de 90 kg donc la masse d'une botte de $0,14175 \text{ m}^3$ est de :

$$0,14175 \times 90 = 12,7575 \text{ kg}$$

- **Prix d'une botte de paille.**
  Le prix de la paille est de 40 euros par tonne, or 1 tonne est égale $1\,000 = 10^3$ kg soit

Masse en kg	1 000 kg	$12,7575$ kg
Prix en euros	40 euros	P

$$\boxed{P = \frac{40 \times 12,7575}{1\,000} \approx 0,51 \text{ €}}$$

2. 2. a. Combien de bottes devra-t-il commander ?

- **Calcul de JF**
  Le triangle IJF est rectangle en I avec

$$IJ = IA - IA = 7,7 - 5 = 2,7 \text{ m} \quad \text{et} \quad IF = 3,6 \text{ m}$$

donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$JF^2 = IJ^2 + IF^2$$
$$JF^2 = 2,7^2 + 3,6^2$$
$$JF^2 = 20,25$$

et puisque JF est une longueur, on a

$$\boxed{JF = \sqrt{20,25} = 4,5 \text{ m.}}$$

- Le toit est un rectangle de côtés [JF] et [FG] donc la surface du toit est de

$$\boxed{S = 4,5 \times 15,3 = 68,85 \text{ m}^2}$$

- La surface au sol d'une botte de paille de hauteur 35 cm est :

$$\boxed{S_1 = 0,9 \times 0,45 = 0,405 \text{ m}^2}$$

- On a donc :

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = \frac{68,85}{0,405} = 170}$$

On a donc besoin de **170 bottes**.

2. b. Quel est le coût de la paille nécessaire pour isoler le toit ?
On a montré lors de la question 1 que le prix d'une botte de paille était de 0,51 € (arrondi au centime).
Donc le prix à payer pour isoler le toit sera de :

$$\boxed{0,51 \times 170 = 86,70 \text{ €}}$$

Remarque : évidement, on considère ici que le prix des bottes est à l'unité ce qui n'est pas le cas en pratique. Si on reprend les données de la question 1. on a :

$$\boldsymbol{P = \frac{40 \times 12,7575}{1000} \times 170 \approx 86,75} \textbf{ euros}.$$

- Fin du devoir -