Correction Baccalauréat ES - Spécialité
Centres Étrangers - 12 Juin 2013

www.math93.com

Pour les candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **6 points**

Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5% de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent. En 2012, la ville comptait 40 000 habitants. On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012 + n$.
On a donc $U_0 = 40\,000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$.

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel par $V_{n+1} = U_n - 9\,600$

Cet exercice est un QCM.

1. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$.

   La valeur de U_1 est :
   $U_1 = 0,875 \times U_0 + 1\,200$
   $U_1 = 0,875 \times 40\,000 + 1\,200$
   $\boxed{U_1 = 36\,200}$

2. $\boxed{\textbf{Réponse b}}$.

   Pour tout entier n on a :
   $$\begin{array}{rcl} V_{n+1} & = & U_{n+1} - 9\,600 \\ v_{n+1} & = & 0,875 \times U_n + 1\,200 - 9\,600 \\ v_{n+1} & = & 0,875 \times \left(U_n - \dfrac{8\,400}{0,875} \right) \\ v_{n+1} & = & 0,875 \times (U_n - 9\,600) \end{array}$$
   Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 0,875 V_n$.
   La suite (V_n) **est une suite géométrique de raison** $q = 0,875$.

3. $\boxed{\textbf{Réponse d}}$.

   – La suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,875$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times 0,875^n = 30\,400 \times 0,875^n$;
   – On sait que si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,875^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$.
   – On a $U_n = V_n + 9\,600$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 9\,600}$.

4. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$.

   La boucle Tant que s'exécute et calcule les termes successifs de la suite Tant qu'ils sont strictement supérieurs à 10 000.
   Donc elle s'arrête pour le premier terme inférieure ou égal à 10 000. Au final l'algorithme affiche le rang de ce terme. La bonne réponse est la réponse c.

5. $\boxed{\textbf{Réponse a}}$.

   En utilisant la fonction TABLE de la calculatrice, on trouve que le premier terme inférieur à 10 000 est u_{33}.

n	u_n
31	$\approx 10\,084{,}31$
32	$\approx 10\,023{,}77$
33	$\approx 9\,970{,}80$
34	$\approx 9\,924{,}45$

La bonne réponse est la réponse a.

Exercice 2. **5 points**

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **Donner le degré de chacun des sommets.**

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	5	5	4	4	2

2. a. **Donner la matrice M associée au graphe.**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b. **On donne la matrice M^3, donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.**
   Le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F est donné par le coefficient $(1;6)$ de la matrice M^3 soit : $\boxed{M^3_{1,6} = 5}$.
   Ces cinq chemins sont : $\boxed{\text{ABCF, ABDF, ABEF, ACEF et ACDF}}$.

3. Pour sa campagne électoral, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.
   Montrer qu'un tel parcours est possible.
   Le graphe est **connexe** et seulement **2 sommets sont de degré impairs**. D'après le théorème d'Euler il existe un **chaîne eulérienne**.
   Il est donc possible de parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

4. a. **En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.**
   On construit le tableau des poids.

A	B	C	D	E	F	G
0A	**8A**	**4A**				
		16B	**12B**	20B		
	12C		20C	**16C**	24C	
				24D	36D	32D
					20E	
						28F

   Le chemin le moins long est donc $\boxed{\text{ACEFG}}$.

   b. **Combien de temps faut-il prévoir pour ce chemin ?**
   Le temps du parcours est de $\boxed{\text{28 minutes}}$.

Exercice 3. **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur [2 ; 8] par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

1. **Montrer que sur [2 ; 8] on a $f'(x) = \frac{-10x+32}{x^3}$.**

   La fonction f est du type $\frac{u}{v}$, et donc dérivable comme quotient de fonctions qui le sont sur [2 ; 8] puisque v y est non nulle.
   La dérivée est donc $\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$, avec $\begin{cases} u(x) &= -x^2 + 10x - 16 \\ u'(x) &= -2x + 10 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) &= x^2 \\ v'(x) &= 2x \end{cases}$

   On obtient donc $\forall x \in [2\ ;\ 8]$,

   $$f'(x) = \frac{(-2x+10) \times x^2 - (-x^2 + 10x - 16) \times 2x}{(x^2)^2}$$
   $$f'(x) = \frac{-2x^3 + 10x^2 + 2x^3 - 20x^2 + 32x}{x^4}$$

   donc
   $$f'(x) = \frac{-10x^2 + 32x}{x^4} = \frac{x \times (-10x + 32)}{x \times x^3} = \frac{-10x + 32}{x^3}$$

   d'où $\forall x \in [2\ ;\ 8]$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{-10x + 32}{x^3}}$.

2. **a. Étudions le signe de $f'(x)$.**
   Sur [2 ; 8], $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-10x + 32$, c'est à dire positif sur [2 ; 3,2] et négatif sur [3,22 ; 8].

x	2		3,2		8
$f'(x)$		+	0	−	

   b. Établir le tableau de variations de f.
   D'où le tableau de variation de la fonction f.

x	2		3,2		8
$f'(x)$		+	0	−	
f			$\frac{9}{16} = 0,5625$		
		↗		↘	
	0				0

3. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur [2 ; 8]. On admet que sur l'intervalle [2 ; 8], on a :

   $$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

   a. Montrer que f est convexe sur [4,8 ; 8].
   $f''(x) = \dfrac{20x - 96}{x^4}$, or $x^4 > 0$ sur [2 ; 8] donc $f''(x)$ est du signe de $20x - 96$ (qui s'annule pour $\frac{96}{20} = 4,8$) donc on peut dresser le tableau de variation de la fonction f' sur [2 ; 8].

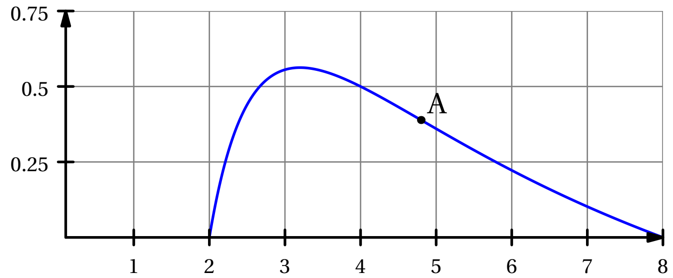
x	2		4,8		8
f''		−	0	+	
f'		↘		↗	

La fonction f' est croissante sur $[4,8\,;\,8]$ donc la fonction f est convexe sur $[4,8\,;\,8]$.

b. Montrer que le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.
La fonction f' est décroissante sur $[2\,;\,4,8]$ puis croissante sur $[4,8\,;\,8]$ donc :
- la fonction f est concave sur $[2\,;\,4,8]$;
- puis convexe sur $[4,8\,;\,8]$.

Cela montre que le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $4,8$ est un point d'inflexion.

Complément
Même si ce n'est pas demandé, on peut tracer la courbe $(\mathscr{C})$ à l'aide de la calculatrice.



4. On considère la fonction F définie sur $[2\,;\,8]$ par :

$$F(x) = -x + 10\ln x + \frac{16}{x}$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[2\,;\,8]$.
Sur $[2\,;\,8]$, la fonction F est dérivable et
$F'(x) = -1 + 10 \times \dfrac{1}{x} + 16 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
$F'(x) = -1 + \dfrac{10}{x} - \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}$ donc
$\boxed{F'(x) = f(x)}$ de ce fait la fonction F est une primitive de f sur $[2\,;\,8]$.

b. Calculer $I = \displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathbf{d}x$.

$I = \displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_2^8 = F(8) - F(2) = -8 + 10\ln 8 + 2 - (-2 + 10\ln 2 + 8)$
$I = -8 + 10\ln 8 + 2 + 2 - 10\ln 2 - 8$
$I = -12 + 10\ln 8 - 10\ln 2$ donc

$\boxed{I = -12 + 10\ln 4 \approx 1,86}$.

Exercice 4. **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[20\,;\,120]$.

   a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
   On cherche donc $P(D < 60)$ avec D qui suit une loi uniforme sur $[20\,;\,120]$.
   $P(D < 60) = P(20 < D < 60) = \dfrac{60-20}{120-20} = 0,4$

   Donc la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes est $\boxed{0,4}$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.
   $E(D) = \dfrac{120+20}{2} = 70$ donc en moyenne les quatre joueurs sont réunis au bout de 70 secondes.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minutes) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(120\,;\,400)$.

   a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.
   J est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(120\,;\,400)$ soit $\mathcal{N}(m = 120\,;\,\sigma^2 = 400)$.
   J a pour $\boxed{\text{espérance } m = 120}$ et son écart-type est donc $\boxed{\sigma = \sqrt{400} = 20}$.

   b. Montrer l'équivalence : $90 < J < 180 \Longleftrightarrow -1,5 < \dfrac{J-120}{20} < 3$

   $90 < J < 180 \Longleftrightarrow 90 - 120 < J - 120 < 180 - 120$, donc

   $90 < J < 180 \Longleftrightarrow \dfrac{-30}{20} < \dfrac{J-120}{20} < \dfrac{60}{20}$

   $90 < J < 180 \Longleftrightarrow -1,5 < \dfrac{J-120}{20} < 3$

   donc $\boxed{90 < J < 180 \Longleftrightarrow -1,5 < \dfrac{J-120}{20} < 3}$.

   c. On définit la variable aléatoire X par $X = \dfrac{J-120}{20}$.
   Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.
   X suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, soit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

   d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

   $P(90 < J < 180) = P\left(-1,5 < \dfrac{J-120}{20} < 3\right)$, d'après la question 2b.

   $P(90 < J < 180) = P(-1,5 < X < 3)$ où X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

   La calculatrice donne alors : $\boxed{P(90 < J < 180) \approx 0,932}$.