

Correction Baccalauréat ES/L - Obligatoire Métropole - Vendredi 21 Juin 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1.

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Généralités

1. a. D'après les données, calculons $P_A(D)$ et $P_B(D)$.

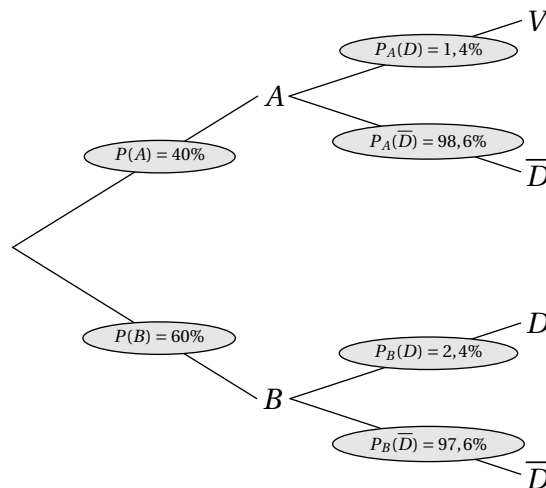
- La probabilité qu'un composant présente un défaut sachant qu'il provient de l'unité A est égale à 0,014 soit 1,4%. Donc $P_A(D) = 1,4\%$;
- La probabilité qu'un composant présente un défaut sachant qu'il provient de l'unité B est égale à 0,024 soit 2,4%. Donc $P_B(D) = 2,4\%$.

b. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

La production journalière de l'unité A est de 600 pièces et celle de l'unité B de 900 pièces. Le nombre total de pièces produites est donc de $600 + 900 = 1\,500$.

- On a donc : $P(A) = \frac{600}{1\,500} = 0,4 = 40\%$;
- Et de même : $P(B) = \frac{900}{1\,500} = 0,6 = 60\%$.

2. Arbre des probabilités.



3. a. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

- On a : $P(A \cap D) = P_A(D) \times P(A) = 1,4\% \times 40\%$ donc $P(A \cap D) = 0,56\%$;
et de même
- On a : $P(B \cap D) = P_B(D) \times P(B) = 2,4\% \times 60\%$ donc $P(B \cap D) = 1,44\%$;

b. Calculer $P(D)$.

Les événements A et B forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a : $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,56\% + 1,44\%$

Soit $P(D) = 2\%$

4. On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

$$\text{On cherche donc } P_D(A), \text{ or } P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,56\%}{2\%}$$

$$\text{Soit } P_D(A) = 0,28\%$$

Partie B : Contrôle de qualité

1. Calculer la probabilité p_1 de l'évènement : "La résistance du composant est supérieure à 211 ohms".

La variable aléatoire R suit une loi normale de moyenne $\mu = 200,5$ et d'écart-type $\sigma = 3,5$.

Or par lecture de la table $p_1 = P(R > 211)$.

$$p_1 = P(R > 211) = 1 - P(R \leq 211) \quad p_1 \approx 1 - 0,9987$$

$$\text{Soit } p_1 \approx 0,13\%.$$

2. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement : "La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé".

$$\text{La calculatrice donne directement } p_2 = P(195 \leq R \leq 205) \approx 84,27\%.$$

Sinon avec la table on utilise le fait que :

$$p_2 = P(195 \leq R \leq 205)$$

$$p_2 = P(R \leq 205) - P(R \leq 195)$$

$$p_2 \approx 0,9007 - 0,0580$$

$$p_2 \approx 84,27\%.$$

3. Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

On répète 3 fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire de Bernouilli (succès/échec) où la probabilité de succès est $P(S) = 0,84$. La variable X qui compte le nombre de succès suit donc une loi Binomiale de paramètre $P(S) = 0,84$ et $n = 3$.

De ce fait la probabilité p cherchée est obtenue par :

$$p = P(X = 2) = C_3^2 \times (0,84)^2 \times (1 - 0,84)^1 \quad p = 3 \times (0,84)^2 \times (0,16) = 0,338688$$

$$\text{Pour conclure, } p \approx 33,87\%$$

Exercice 2.

6 points

Commun à tous les candidats

1. **Proposition 1 : VRAIE**. Le compte sera à découvert début mars 2014.

La fonction TABLE de la calculatrice permet de répondre facilement à la question :

09.2013	:	c_0	=	2500
10.2013	:	c_1	=	2080
11.2013	:	c_2	=	1659,2
12.2013	:	c_3	$\approx$	1237,5
01.2014	:	c_4	$\approx$	814,95
02.2013	:	c_5	$\approx$	391,58
03.2013	:	c_6	$\approx$	-32,63

Au début du mois de mars 2014, la capital est de : $c_6 \approx -32,63$ et donc le compte est à découvert.

2. **Proposition 2 : VRAIE**. La fonction f est convexe sur l'intervalle I .

Sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$ est dérivable comme composée de fonctions qui le sont. On a facilement : $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

De la même façon, sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$, la fonction f' définie par $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ est dérivable comme composée de fonctions qui le sont. On obtient facilement $f''(x) = \frac{1}{x^2}$.

La dérivée seconde de f existe et est strictement positive sur I , donc la fonction dérivée f' y est croissante ce qui prouve que la fonction f est convexe sur l'intervalle I .

3. **Proposition 3 : VRAIE**. F est une primitive de f sur I .

Le logiciel donne la dérivée de F sur I sous la forme $F'(x) = \ln x^2$.

Or pour tout réel x supérieur strictement à 0 on a : $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, \ln x^2 = 2 \ln x = f(x)$.

Donc sur I , $F'(x) = f(x)$ et donc F est bien une primitive de f sur I .

4. **Proposition 4 : VRAIE**.

La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0,6$.

La calculatrice donne alors : $P(-0,6 \leq X \leq 0,6) \approx 0,682689$ et donc on a bien $P(-0,6 \leq X \leq 0,6) \approx 0,68$.

Exercice 3.

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : étude graphique La fonction B représente le bénéfice hebdomadaire, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x milliers de poulies.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.

Il suffit de tracer la droite d'équation $y = 13$ et de lire les points d'intersection avec la courbe tracée pour avoir les bornes de l'intervalle cherché.

Par lecture graphique on obtient $x_1 \approx 2,5$, $x_2 \approx 3,4$. L'intervalle cherché pour x est : $x \in [2,5 ; 3,4]$.

Le nombre de poulies doit donc varier entre 2 500 et 3 400 environ pour que le bénéfice soit supérieur à 13 000 euros.

2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?

Il suffit de lire les coordonnées du point de la courbe qui a la plus grande ordonnée, soit environ $S(3 ; 15,2)$.

Le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est donc d'environ 15 200 euros, il est atteint pour la vente de $N = 3\,000$ poulies.

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut :

$$B(x) = -5 + (4 - x)e^x$$

1. a. Calculer la dérivée de B notée B' et montrer que $B'(x) = (3 - x)e^x$ sur $I = [0 ; 3,6]$.

La fonction B est définie sur I et de la forme uv avec $u(x) = 4 - x$, $v(x) = e^x$. Donc B est dérivable comme produit de fonctions qui le sont et $B'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

On a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$ donc

$$B'(x) = -1 \times e^x + (4 - x) \times e^x = -e^x + 4e^x - xe^x = 3e^x - xe^x.$$

Donc sur $I = [0 ; 3,6]$, $B'(x) = (3 - x)e^x$.

- b. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I .

On a montré que sur $I = [0 ; 3,6]$, $B'(x) = (3 - x)e^x$.

Or pour tout réel x , on a $e^x > 0$ donc B' est du signe de $(3 - x)$.

$B'(x)$ est donc négatif sur $[3 ; 3,6]$, nul en 3 et positif sur $[0 ; 3]$.

- c. Tableau de variation de B .

x	0	3	3,6
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-1	$e^3 - 5 \approx 15,1$	$B(3,6) \approx 9,64$

2. a. Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$ et l'autre dans $[3 ; 3,6]$.

– Pour x_1 sur $[0 ; 3]$.

– La fonction B est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 3]$;

– L'image par f de l'intervalle $[0 ; 3]$ est $[-1 ; e^3 - 5]$ d'après le tableau de variations.

– Le réel $k = 13$ appartient à l'intervalle image $[-1 ; e^3 - 5]$ car $e^3 - 5 \approx 15,1$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k = 13$ admet une solution unique x_1 sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

- Pour x_2 sur $[3; 3,6]$.
 - La fonction B est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[3; 3,6]$;
 - L'image par f de l'intervalle $[3; 3,6]$ est $[B(3,6); e^3 - 5]$ d'après le tableau de variations.
 - Le réel $k = 13$ appartient à l'intervalle image $[B(3,6); e^3 - 5]$ car $B(3,6) \approx 9,64$ et $e^3 - 5 \approx 15,1$.
 Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 13$ admet une solution unique x_2 sur l'intervalle $[3; 3,6]$.

b. Déterminer une valeur approchée de chacune des deux solutions.

- Pour x_1 sur $[0; 3]$.

Pour avoir un encadrement de x_1 , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

$$\text{- Avec un pas de } \Delta = 0,1 \text{ on obtient : } \begin{cases} B(2,4) & \approx 12,63 < 13 \\ B(2,5) & \approx 13,27 > 13 \end{cases}, \text{ donc } 2,4 \leq x_1 \leq 2,5.$$

$$\text{- Avec un pas de } \Delta = 0,01 \text{ on obtient : } \begin{cases} B(2,45) & \approx 12,96 < 13 \\ B(2,46) & \approx 13,025 > 13 \end{cases},$$

$$\text{donc } \boxed{2,45 \leq x_1 \leq 2,46}.$$

- Pour x_2 sur $[3; 3,6]$.

$$\text{- Avec un pas de } \Delta = 0,1 \text{ on obtient : } \begin{cases} B(3,3) & \approx 13,979 > 13 \\ B(3,4) & \approx 12,978 < 13 \end{cases}, \text{ donc } 3,3 \leq x_2 \leq 3,4.$$

$$\text{- Avec un pas de } \Delta = 0,01 \text{ on obtient : } \begin{cases} B(3,39) & \approx 13,096 > 13 \\ B(3,4) & \approx 12,978 < 13 \end{cases},$$

$$\text{donc } \boxed{3,39 \leq x_2 \leq 3,4}.$$

Exercice 4.

5 points

Candidats de ES n'ayant pas choisi la spécialité et candidats de L

1. Calculer $f(5)$.

On trouve $f(5) = 6,1$.

2. Calcul du pourcentage p de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.

$$p = \frac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}} = \frac{D_5 - f(5)}{D_5} = \frac{6,3 - 6,1}{6,3} \approx 0,031746$$

$$\text{Donc } \boxed{p \approx 3,2\%}.$$

3. En utilisant la fonction f , quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013? (On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).

Pour l'année 2013, $n = 18$ et donc D_{18} est approchée par $f(18) = 5,7776$.

La dépense totale pour l'année 2013 peut donc être estimée à $\boxed{5,78}$ milliards d'euros.

4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1^{er} janvier 1995 et le 1^{er} janvier 2015.

$$\text{On calcule pour cela } M = \frac{1}{20} \int_0^{20} f(x) dx.$$

a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

$$\text{Une primitive de } f \text{ sur l'intervalle } [0; 20] \text{ est } F(x) = \frac{-0,0032}{4} x^4 + \frac{0,06}{3} x^3 + 5x,$$

$$\text{soit } \boxed{F(x) = -0,0008x^4 + 0,02x^3 + 5x}.$$

b. Calculer M .

$$\text{On a donc } M = \frac{1}{20} \int_0^{20} f(x) dx = \frac{1}{20} [F(x)]_0^{20} = \frac{1}{20} (F(20) - F(0)).$$

$$\boxed{M = \frac{132}{20} = 6,6}$$