

Correction Baccalauréat ES - Spécialité Métropole - Vendredi 21 Juin 2013

www.math93.com / www.mathexams.fr

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1.

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Généralités

1. a. D'après les données, calculons $P_A(D)$ et $P_B(D)$.

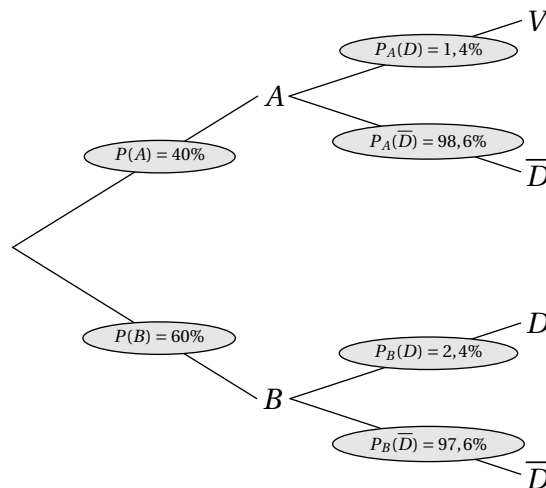
- La probabilité qu'un composant présente un défaut sachant qu'il provient de l'unité A est égale à 0,014 soit 1,4%. Donc $P_A(D) = 1,4\%$;
- La probabilité qu'un composant présente un défaut sachant qu'il provient de l'unité B est égale à 0,024 soit 2,4%. Donc $P_B(D) = 2,4\%$.

b. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

La production journalière de l'unité A est de 600 pièces et celle de l'unité B de 900 pièces. Le nombre total de pièces produites est donc de $600 + 900 = 1\,500$.

- On a donc : $P(A) = \frac{600}{1\,500} = 0,4 = 40\%$;
- Et de même : $P(B) = \frac{900}{1\,500} = 0,6 = 60\%$.

2. Arbre des probabilités.



3. a. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

- On a : $P(A \cap D) = P_A(D) \times P(A) = 1,4\% \times 40\%$ donc $P(A \cap D) = 0,56\%$;
et de même
- On a : $P(B \cap D) = P_B(D) \times P(B) = 2,4\% \times 60\%$ donc $P(B \cap D) = 1,44\%$;

b. Calculer $P(D)$.

Les événements A et B forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a : $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,56\% + 1,44\%$

Soit $P(D) = 2\%$

4. On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

On cherche donc $P_D(A)$, or $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,56\%}{2\%}$

Soit $P_D(A) = 0,28\%$

Partie B : Contrôle de qualité

1. Calculer la probabilité p_1 de l'évènement : "La résistance du composant est supérieure à 211 ohms".

La variable aléatoire R suit une loi normale de moyenne $\mu = 200,5$ et d'écart-type $\sigma = 3,5$.

Or par lecture de la table $p_1 = P(R > 211)$.

$$p_1 = P(R > 211) = 1 - P(R \leq 211) \quad p_1 \approx 1 - 0,9987$$

Soit $p_1 \approx 0,13\%$.

2. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement : "La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé".

La calculatrice donne directement $p_2 = P(195 \leq R \leq 205) \approx 84,27\%$.

Sinon avec la table on utilise le fait que :

$$p_2 = P(195 \leq R \leq 205)$$

$$p_2 = P(R \leq 205) - P(R \leq 195)$$

$$p_2 \approx 0,9007 - 0,0580$$

$$p_2 \approx 84,27\%.$$

3. Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

On répète 3 fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire de Bernouilli (succès/échec) où la probabilité de succès est $P(S) = 0,84$. La variable X qui compte le nombre de succès suit donc une loi Binomiale de paramètre $P(S) = 0,84$ et $n = 3$.

De ce fait la probabilité p cherchée est obtenue par :

$$p = P(X = 2) = C_3^2 \times (0,84)^2 \times (1 - 0,84)^1 \quad p = 3 \times (0,84)^2 \times (0,16) = 0,338688$$

Pour conclure, $p \approx 33,87\%$

Exercice 2.

4 points

Commun à tous les candidats

1. **Proposition 1 : VRAIE**. Le compte sera à découvert début mars 2014.

La fonction TABLE de la calculatrice permet de répondre facilement à la question :

09.2013	:	c_0	=	2500
10.2013	:	c_1	=	2080
11.2013	:	c_2	=	1659,2
12.2013	:	c_3	$\approx$	1237,5
01.2014	:	c_4	$\approx$	814,95
02.2013	:	c_5	$\approx$	391,58
03.2013	:	c_6	$\approx$	-32,63

Au début du mois de mars 2014, la capital est de : $c_6 \approx -32,63$ et donc le compte est à découvert.

2. **Proposition 2 : VRAIE**. La fonction f est convexe sur l'intervalle I .

Sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$ est dérivable comme composée de fonctions qui le sont. On a facilement : $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

De la même façon, sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$, la fonction f' définie par $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ est dérivable comme composée de fonctions qui le sont. On obtient facilement $f''(x) = \frac{1}{x^2}$.

La dérivée seconde de f existe et est strictement positive sur I , donc la fonction dérivée f' y est croissante ce qui prouve que la fonction f est convexe sur l'intervalle I .

3. **Proposition 3 : VRAIE**. F est une primitive de f sur I .

Le logiciel donne la dérivée de F sur I sous la forme $F'(x) = \ln x^2$.

Or pour tout réel x supérieur strictement à 0 on a : $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, \ln x^2 = 2 \ln x = f(x)$.

Donc sur I , $F'(x) = f(x)$ et donc F est bien une primitive de f sur I .

4. **Proposition 4 : VRAIE**.

La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0,6$.

La calculatrice donne alors : $P(-0,6 \leq X \leq 0,6) \approx 0,682689$ et donc on a bien $P(-0,6 \leq X \leq 0,6) \approx 0,68$.

Exercice 3.

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : étude graphique La fonction B représente le bénéfice hebdomadaire, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x milliers de poulies.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.

Il suffit de tracer la droite d'équation $y = 13$ et de lire les points d'intersection avec la courbe tracée pour avoir les bornes de l'intervalle cherché.

Par lecture graphique on obtient $x_1 \approx 2,5$, $x_2 \approx 3,4$. L'intervalle cherché pour x est : $x \in [2,5 ; 3,4]$.

Le nombre de poulies doit donc varier entre 2 500 et 3 400 environ pour que le bénéfice soit supérieur à 13 000 euros.

2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?

Il suffit de lire les coordonnées du point de la courbe qui a la plus grande ordonnée, soit environ $S(3 ; 15,2)$.

Le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est donc d'environ 15 200 euros, il est atteint pour la vente de $N = 3\,000$ poulies.

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut :

$$B(x) = -5 + (4 - x)e^x$$

1. a. Calculer la dérivée de B notée B' et montrer que $B'(x) = (3 - x)e^x$ sur $I = [0 ; 3,6]$.

La fonction B est définie sur I et de la forme uv avec $u(x) = 4 - x$, $v(x) = e^x$. Donc B est dérivable comme produit de fonctions qui le sont et $B'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

On a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$ donc

$$B'(x) = -1 \times e^x + (4 - x) \times e^x = -e^x + 4e^x - xe^x = 3e^x - xe^x.$$

Donc sur $I = [0 ; 3,6]$, $B'(x) = (3 - x)e^x$.

- b. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I .

On a montré que sur $I = [0 ; 3,6]$, $B'(x) = (3 - x)e^x$.

Or pour tout réel x , on a $e^x > 0$ donc B' est du signe de $(3 - x)$.

$B'(x)$ est donc négatif sur $[3 ; 3,6]$, nul en 3 et positif sur $[0 ; 3]$.

- c. Tableau de variation de B .

x	0	3	3,6
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-1	$e^3 - 5 \approx 15,1$	$B(3,6) \approx 9,64$

2. a. Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$ et l'autre dans $[3 ; 3,6]$.

– Pour x_1 sur $[0 ; 3]$.

– La fonction B est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 3]$;

– L'image par f de l'intervalle $[0 ; 3]$ est $[-1 ; e^3 - 5]$ d'après le tableau de variations.

- Le réel $k = 13$ appartient à l'intervalle image $[-1 ; e^3 - 5]$ car $e^3 - 5 \approx 15,1$.
Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 13$ admet une solution unique x_1 sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
- **Pour x_2 sur $[3 ; 3,6]$.**
 - La fonction B est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[3 ; 3,6]$;
 - L'image par f de l'intervalle $[3 ; 3,6]$ est $[B(3,6) ; e^3 - 5]$ d'après le tableau de variations.
 - Le réel $k = 13$ appartient à l'intervalle image $[B(3,6) ; e^3 - 5]$ car $B(3,6) \approx 9,64$ et $e^3 - 5 \approx 15,1$.
Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 13$ admet une solution unique x_2 sur l'intervalle $[3 ; 3,6]$.

b. Déterminer une valeur approchée de chacune des deux solutions.

- **Pour x_1 sur $[0 ; 3]$.**

Pour avoir un encadrement de x_1 , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0,1$ on obtient : $\begin{cases} B(2,4) \approx 12,63 < 13 \\ B(2,5) \approx 13,27 > 13 \end{cases}$, donc $2,4 \leq x_1 \leq 2,5$.

- Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient : $\begin{cases} B(2,45) \approx 12,96 < 13 \\ B(2,46) \approx 13,025 > 13 \end{cases}$,

donc $2,45 \leq x_1 \leq 2,46$.

- **Pour x_2 sur $[3 ; 3,6]$.**

- Avec un pas de $\Delta = 0,1$ on obtient : $\begin{cases} B(3,3) \approx 13,979 > 13 \\ B(3,4) \approx 12,978 < 13 \end{cases}$, donc $3,3 \leq x_2 \leq 3,4$.

- Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient : $\begin{cases} B(3,39) \approx 13,096 > 13 \\ B(3,4) \approx 12,978 < 13 \end{cases}$,

donc $3,39 \leq x_2 \leq 3,4$.

Exercice 4.

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.

Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.

Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2 200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.

Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.

Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : étude du trajet

- 1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).**

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	M	P	T	G	LS	B	F
0	174A		120A				
		300M	314M				
	260T	366T		288T			
					396G		
					419P	398P	
							541LS
							502B

Le plus cours trajet est **A - M - P - B - F**. Il parcourra 502 km

2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).

Le coût des 4 voyages aller-retour sera donc $4 \times 2 \times 502 \times 0,51 = 2\,048$ euros.

En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

La prime sera donc de $P = 2\,200 - 2\,048 = 152$ €

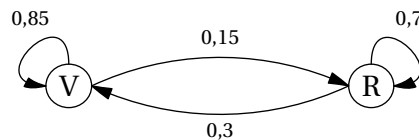
Partie B : traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.

L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les événements suivants :

- Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,85.
- Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.



2. Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

3. Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.

– On a $P_2 = P_1 \times M$ soit

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix},$$

donc $P_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$.

– On a $P_3 = P_2 \times M$ soit

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7675 & 0,2325 \end{pmatrix},$$

donc $P_3 = \begin{pmatrix} 0,7675 & 0,2325 \end{pmatrix}$.

$$P_2 = (0,85 \ 0,15) \quad P_3 = (0,7675 \ 0,2325)$$

- b. Conclure quant à la probabilité p de l'événement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

La probabilité p cherchée est donc de $p = 0,2325$.