



## Exercice 1. QCM

4 points

Commun à tous les candidats.

1. Réponse b :  $f$  est positive.

En effet la courbe de  $f$ , notée  $\mathcal{C}$  est située au dessus de l'axe des abscisses.

2. Réponse c :  $f'(0) = 0$ .

En effet la courbe de  $f$ , notée  $\mathcal{C}$  présente visiblement une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

3. Réponse c :  $f'(4) = -\frac{1}{e^2}$ .

En effet on admet que l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en 4 est  $y = -\frac{x}{e^2} + \frac{5}{e^2}$ .

### Définition 1

Soit  $f$  une fonction et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Si la courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente au point de coordonnées  $(x; f(x))$  non parallèle à l'axe des ordonnées alors on appelle nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $x$  et on note  $f'(x)$  le coefficient directeur de cette tangente.

Le nombre dérivé de  $f$  en 4 est donc le coefficient directeur de sa tangente en 4 soit  $f'(4) = -\frac{1}{e^2}$ .

4. Réponse c :  $3 < A < 4$ .

On pose

$$A = \int_{-2}^2 f(x) dx$$

Puisque la fonction est positive sur  $[-2; 2]$ , l'aire située sous la courbe  $\mathcal{C}$  entre  $-2$  et  $2$ , et au dessus de l'axe des abscisses est donnée par  $A$ , exprimée en unités d'aire.

Graphiquement, cette aire est :

- plus petite que celle du rectangle de côtés 4 et 1, donc d'aire 4 unités d'aire ;
- et plus grande que celle du rectangle de côtés 4 et 0.7, donc d'aire 2,8 unités d'aire ;

Donc on peut dire que la seule solution possible est la c, soit  $3 < A < 4$ .



## Exercice 2. Probabilités

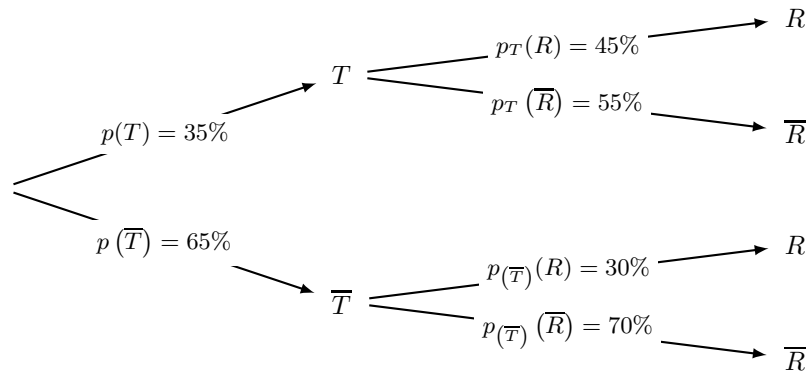
6 points

Commun à tous les candidats

Les résultats seront arrondis si nécessaire à  $10^{-4}$  près.

### Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2. Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est de 0,3525.

La probabilité qu'un appartement loué soit rentable est donnée par  $p(R)$  or grâce à la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p_T(R) \times p(T) + p_{\bar{T}}(R) \times p(\bar{T})$$

$$p(R) = 0,45 \times 0,35 + 0,30 \times 0,65$$

soit

$$p(R) = 0,3525$$

3. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2 sachant qu'il est rentable.

La probabilité cherchée est :

$$p_R(T) = \frac{p(T \cap R)}{p(R)} = \frac{p_T(R) \times p(T)}{p(R)}$$

$$p_R(T) = \frac{0,45 \times 0,35}{0,3525} \approx 0,4468$$

### Partie B

$X$  la variable aléatoire égale au nombre d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de 100. On suppose que  $X$  suit une loi normale de moyenne  $\mu = 35$  et d'écart-type  $\sigma = 5$ .

1. Calculer  $P(25 \leq X \leq 35)$ .

La calculatrice nous donne alors arrondi à  $10^{-4}$  près :

$$P(25 \leq X \leq 35) \approx 0,4772$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TlStat.normFDR}(25, 25, 35, 5) \approx 0,477249938511$$

2. Calculer la probabilité qu'au moins 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables.

La probabilité cherchée est  $P(45 \leq X \leq 100)$  et la calculatrice donne arrondi à  $10^{-4}$  près :

$$P(45 \leq X \leq 100) \approx 0,0228$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TlStat.normFDR}(45, 100, 35, 5) \approx 0,022750062014$$



## Partie C

### 1. Déterminer la fréquence observée.

Sur les 280 dossiers d'appartements loués, 120 sont rentables donc la fréquence observée est :

$$f = \frac{120}{280} \approx 0,4286$$

### 2. Peut-on valider l'affirmation selon laquelle 60% des appartements loués sont rentables ?

- Le responsable affirme que le pourcentage d'appartements loués rentables est égal à  $p = 60\%$ .
- Afin de vérifier cette affirmation  $n = 280$  dossiers sont prélevés au hasard.
- On constate que 120 sont rentables  $f \approx 42,86\%$ .

On va regarder si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique. Si c'est le cas, on considérera que l'entreprise a raison au seuil de 95%

#### Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence  $F_n$  d'un caractère dans un échantillon de taille  $n$  est :

$$I_n = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

où  $p$  désigne la proportion de ce caractère dans la population.

On a  $n = 280$ ,  $p = 60\%$  alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 280 \geq 30 \\ \checkmark & np = 280 \times 60\% = 168 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 280 \times 40\% = 112 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence  $F_{280}$  est :

$$I_{280} = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,6 - 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{280}} ; 0,6 + 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{280}} \right]$$

soit

$$I \approx [54,2\% ; 65,8\%]$$

La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation  $f = 42,86\% \notin I_{280}$ , donc on rejette l'hypothèse. **L'annonce de l'entreprise est rejetée au seuil de 95%.**

On applique en fait la propriété suivante :

#### Propriété 1

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est  $p$ . On observe  $f$  comme fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille  $n$ . Si  $I_n$  est l'intervalle de fluctuation de la fréquence à 95% dans les échantillons de tailles  $n$ , alors la **règle de décision** est la suivante :

- si  $f \in I_n$  : on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est  $p$  dans la population n'est pas remise en cause et on l'**accepte** ;
- si  $f \notin I_n$  : on **rejette** l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut  $p$ .



### Exercice 3. Étude de fonction

5 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A : Modèle exponentiel

1. Estimer la durée de chargement en secondes, pour 8 000 personnes connectées.

On lit donc  $f(8) \approx 97$

La durée de chargement pour 8 000 personnes connectées est donc d'environ **97 secondes**.

2.

2. a. Déterminer graphiquement un antécédent de 15 par  $f$ .

On cherche donc la valeur de  $x$  telle que  $f(x) = 15$ . On lit graphiquement  $x = 2$  et un antécédent de 15 par  $f$  est 2.

2. b. Donner une interprétation de ce résultat.

La durée de chargement pour **2 000 personnes** connectées est donc de **15 secondes**.

#### Partie B : Modèle logarithmique

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g : \begin{cases} [0, 5 ; \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 10x - 8 \ln x \end{cases}$$

1.

1. a. Calculer la dérivée de  $g$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0, 5 ; \infty[$  comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in [0, 5 ; \infty[ ; g'(x) = (10x)' - 8(\ln x)'$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 5 ; \infty[ ; g'(x) = 10 - \frac{8}{x} = \frac{10x - 8}{x}}$$

1. b. Dresser le tableau de variations de  $g$ .

Pour tout réel  $x$  de  $[0, 5 ; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{10x - 8}{x}$  donc puisque  $x$  est positif sur cet intervalle,  $g'(x)$  est du signe de  $10x - 8$ .

Or

$$\begin{cases} 10x - 8 > 0 & \iff x > \frac{8}{10} = 0,8 \\ 10x - 8 = 0 & \iff x = \frac{8}{10} = 0,8 \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in [0, 5 ; +\infty[ ; \begin{cases} g'(x) = 0 & \iff x = 0,8 \\ g'(x) > 0 & \iff 0,8 < x \\ g'(x) < 0 & \iff 0,5 \leq x < 0,8 \end{cases}}$$

On a donc  $g$  décroissante sur  $[0, 5 ; 0, 8]$  et croissante sur  $[0, 8 ; +\infty[$  :

$x$	0.5	0.8	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
Variations de $g$	$g(0.5) \approx 10.5$	↓ $g(0.8) \approx 9.8$	$+\infty$



2. On considère la fonction  $g$  définie par :

$$G : \begin{cases} [0, 5 ; \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G(x) = 5x^2 + 8x - 8x \ln x \end{cases}$$

2. a. Justifier que  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $[0, 5 ; +\infty[$ .

La fonction  $G$  est dérivable sur  $[0, 5 ; +\infty[$  comme sommes et produits de fonctions qui le sont et pour tout réel  $x$  de  $[0, 5 ; +\infty[$  on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= (5x^2 + 8x)' - 8(x \ln x)' \\ G'(x) &= 10x + 8 - 8 \left( 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \right) \\ G'(x) &= 10x + 8 - 8 \ln x - 8 \\ G'(x) &= 10x - 8 \ln x \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in [0, 5 ; +\infty[ ; G'(x) = g(x)}$$

ce qui prouve que  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $[0, 5 ; +\infty[$ .

2. b. Montrer que  $I = \frac{1}{2} \int_2^4 g(x) dx = a + b \ln 2$ .

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_2^4 g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} [G(x)]_2^4 \\ &= \frac{1}{2} (G(4) - G(2)) \\ &= \frac{1}{2} (76 - 48 \ln 2) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \int_2^4 g(x) dx = 38 - 24 \ln 2}$$

2. c. Déterminer une valeur approchée de  $I$  au centième et interpréter le résultat.

$$\boxed{I = 38 - 24 \ln 2 \approx 21,36 \text{ u.a.}}$$

Cela signifie que la durée moyenne de chargement est 21,36 s quand il y a entre 2 000 et 4 000 internautes connectés simultanément.

## Partie C

Pour 8 000 personnes, le temps de chargement est de 92 secondes. Or :

- On a trouvé à la partie A que  $f(8) = 97$ . Soit un écart de :  $92 - f(8) = 5$  ;
- et  $g(8) \approx 63,36$ . Soit un écart de :  $92 - g(8) \approx 28,64$  ;

Le modèle exponentiel décrit donc mieux la situation pour cette vidéo.



**Exercice 4. Obligatoire - Suites**

**5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1.

**1. a. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2014.**

Chaque année on conserve donc 95% des arbres de l'année précédente et on replante 3 000 arbres. On a donc en 2014 :

$$u_1 = 50\,000 \times 0,95 + 3\,000 = 50\,500$$

La forêt contient donc **50 500 arbres en 2014.**

**1. b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 50\,000$  et  $u_{n+1} = 0,95u_n + 3\,000$ .**

Chaque année on conserve 95% des arbres de l'année précédente soit  $0,95 \times u_n$  auquel on ajoute les 3 000 arbres replantés. On a donc bien :

$$u_{n+1} = 0,95 u_n + 3\,000$$

De plus en 2013 on a 50 000 arbres donc  $u_0 = 50\,000$ . Soit

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 50\,000 \\ u_{n+1} & = 0,95 u_n + 3\,000 \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

2. On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = 60\,000 - u_n$ .

**2. a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.**

Pour tout entier  $n$  on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60\,000 - u_{n+1} \\ &= 60\,000 - (0,95 \times u_{n+1} + 3\,000) \\ &= -0,95 \times u_{n+1} + 57\,000 \\ &= 0,95 \left( -u_n + \frac{57\,000}{0,95} \right) \\ &= 0,95 (-u_n + 60\,000) \\ v_{n+1} &= 0,95 \times v_n \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc une suite **géométrique de raison  $q = 0,95$ , et de premier terme  $v_0 = 60\,000 - u_0 = 10\,000$ .**

$$(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 10\,000 \\ v_{n+1} & = 0,95 v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

**2. b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .**

Puisque  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $q = 0,95$ , et de premier terme  $v_0 = 10\,000$ , on écrit le terme général en fonction de  $n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 10\,000 (0,95)^n$$

**2. c. En déduire que pour tout entier  $n$  on a  $u_n = 10\,000 (6 - 0,95^n)$ .**

De l'égalité  $v_n = 60\,000 - u_n$  définie pour tout entier  $n$ , on peut en déduire l'expression de

$$u_n = 60\,000 - v_n = 60\,000 - 10\,000 (0,95)^n$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 10\,000 (6 - 0,95^n)$$

**2. d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .**

Par théorème



**Théorème 2**

Si le réel  $q$  est tel que :  $-1 < q < 1$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici  $-1 < q = 0,95 < 1$  et d'après le théorème 1 :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,95)^n = 0$ .

Ce qui nous donne la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 10\,000 (6 - 0,95^n)$$

soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 60\,000$$

**2. e. Interpréter le résultat.**

On peut donc en conclure, qu'au bout d'un grand nombre d'années, la forêt contiendra 60 000 arbres.

3.

**3. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $u_n \geq 57\,000$ .**

$$u_n \geq 57\,000 \iff 10\,000 (6 - 0,95^n) \geq 57\,000 \tag{1}$$

$$\iff 6 - 0,95^n \geq 5,7 \tag{2}$$

$$\iff -0,95^n \geq -0,3 \tag{3}$$

$$\iff 0,95^n \leq 0,3 \tag{4}$$

On compose par la fonction  $x \mapsto \ln x$  qui est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc :

$$u_n \geq 57\,000 \iff n \ln 0,95 \leq \ln 0,3 \tag{5}$$

Or  $\ln 0,95 < 0$  donc :

$$u_n \geq 57\,000 \iff n \geq \frac{\ln 0,3}{\ln 0,95} \approx 23,47 \tag{6}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 57\,000 \iff n \geq 24$$

**3. b. Interpréter le résultat.**

Cela signifie donc qu'à partir de 2037 la forêt aura plus de 57 000 arbres.

**4. Algorithme.**

**4. a. On souhaite écrire un algorithme que affiche, pour un entier  $n$  donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang  $n$ . Parmi ces trois algorithmes, un seul convient, lequel ?**

On veut afficher tous les termes de la suite, il faut donc que la commande Afficher  $U$  soit dans une boucle. On ne peut donc choisir que l'algorithme 3. En effet :

- l'algorithme 1 n'affiche que le premier rang du terme supérieur ou égal à  $A$  ;
- l'algorithme 2 n'affiche que le terme de rang  $N$ .

**4. b. Lorsque  $A = 57\,000$  l'algorithme 1 affiche 24. Interpréter ce résultat.**

L'algorithme 1 affiche que le premier rang du terme supérieur ou égal à  $A = 57\,000$  donc 24 d'après la question 3a puisqu'on a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 57\,000 \iff n \geq 24$$

C'est donc à partir de 2037 que la forêt contiendra au moins 57 000 arbres.



## Exercice 4. Spécialité - Graphes

5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

### Partie A

1. Déterminer, en justifiant, si le graphe  $\mathcal{G}$  est :

1. a. complet ;

- Un **graphe simple** est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête. Donc le **graphe  $\mathcal{G}$  est simple**.
- Un graphe simple est dit **complet** si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Le **graphe  $\mathcal{G}$  n'est pas complet** car par exemple les sommets A et E ne sont pas reliés par une arête.

1. b. connexe.

Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u. Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets par conséquent **le graphe  $\mathcal{G}$  est connexe**.

2.

2. a. Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.

Citons le théorème d'Euler

**Théorème 3** (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

Un graphe connexe contient **une chaîne eulérienne** si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.  
Un graphe connexe contient **un cycle eulérien** si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (autrement dit tous ses sommets sont de degré pair).

**Remarque :** Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse [Leonhard d'Euler](#) (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	2	3	4	3	4	2	4	4

Donc **deux sommets sont de degré impair**, les sommets B et D. Par conséquent, d'après le théorème 3, ce graphe connexe admet une **chaîne eulérienne**.

Il est possible d'organiser la tournée **en passant au moins une fois par chaque ville tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute**.

2. b. Citer un trajet de ce type.

Le nombre de sommets de degré impair est 2 : ce sont les sommets B et C. D'après le théorème d'Euler, le graphe  $\mathcal{G}$  admet donc une chaîne eulérienne. Les extrémités de la chaîne sont les sommets de degré impair, soit B et D.

Pour déterminer une telle chaîne, on applique l'algorithme d'Euler et on trouve par exemple, par étapes successives :

- **Étape 1 :** **B-A-D** (recherche d'une chaîne d'extrémités B et D)
- **Étape 2 :** on insère le cycle **B-E-G-C-B** à la place de B dans la chaîne précédente.  
On obtient **B-E-G-C-B-A-D**
- **Étape 3 :** on insère le cycle **C-E-D-H-C** à la place de C dans la chaîne précédente.  
On obtient **B-E-G-C-E-D-H-C-B-A-D**
- **Étape 4 :** on insère le cycle **G-H-F-G** à la place de G dans la chaîne précédente.  
On obtient **B-E-G-H-F-G-C-E-D-H-C-B-A-D**
- **Étape 5 :** toutes les arêtes du graphe ont été utilisées. Une chaîne eulérienne possible est donc :

**B-E-G-H-F-G-C-E-D-H-C-B-A-D**





3. On appelle M la matrice adjacente au graphe  $\mathcal{G}$ , les sommets pris dans l'ordre alphabétique.

3. a. Déterminer la matrice M.

M la matrice adjacente au graphe  $\mathcal{G}$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. b. On donne la matrice  $M^3$ . Justifier le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H. Préciser ces chemins.

Le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H est donnée par le terme  $a_{58} = 4 = a_{85}$  de la matrice symétrique réelle  $M^3$ . Il existe donc 4 trajets de longueur 3 reliant E à H :

$$\boxed{E-G-F-H; E-C-G-H; E-B-C-H; E-G-C-H}$$

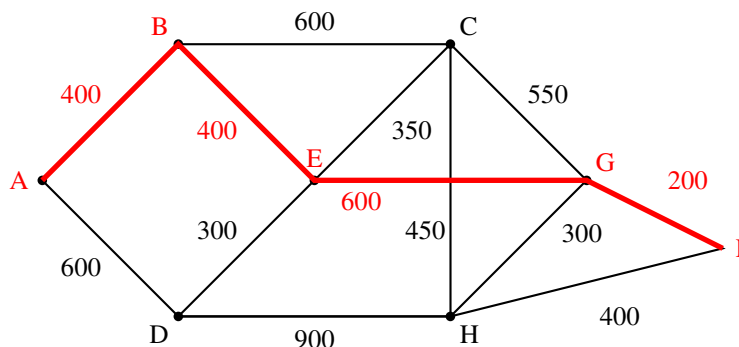
### Partie B

Déterminer en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F. Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

de .. à	à B	à C	à D	à E	à G	à H	à F
A	<b>400A</b>	$\infty$	600A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
B(400A)	-	$400 + 600 = 1\ 000B$	<b>600A</b>	$400 + 400 = 800B$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
D(600A)	-	1 000B	-	<del>(900D)</del> <b>800B</b>	$\infty$	1 500D	$\infty$
E(800B)	-	<del>(1 150E)</del> <b>1 000B</b>	-	-	1 400E	1 500D	$\infty$
C(1 000B)	-	-	-	-	<del>(1 550C)</del> <b>1 400E</b>	1 450C	$\infty$
G(1 400E)	-	-	-	-	-	<del>(1 700G)</del> <b>1 450C</b>	1 600G
H(1 450C)	-	-	-	-	-	-	<b>1 600G</b>
F(1 600G)	-	-	-	-	-	-	-

Le plus courts trajet est **A - B - E - G - F**. Il est d'une longueur de 1 600 km



**Remarque :** L'algorithme de Dijkstra porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002). Il a été publié en 1959.

- Fin du Devoir -