Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2014 - ES/L Antilles Guyane

Série ES/L Obli. et Spé.
Jeudi 19 juin 2014
Correction

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **Réponse a :** $\boxed{S = -1 + 2^{31}}$.

La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{30}$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme 1 donc on a :

$$S = \left(1^{\text{er}} \text{ terme de la somme}\right) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de terme de la somme}}}{1 - q}$$

$$\boxed{S = 1 \times \frac{1 - 2^{31}}{1 - 2} = -1 + 2^{31}}$$

2. **Réponse b :** $\boxed{\textbf{L'équation (E) admet donc trois solutions distinctes}}$.

L'équation (E) se factorise facilement sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(E) \quad : \quad -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0 &\iff -\frac{1}{3}\,x\left(x^2 - 3x - 9\right) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } \left(x^2 - 3x - 9\right) = 0\end{aligned}$$

Or le discriminant associée au polynôme du second degré est positif.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 45 > 0$$

Ce polynôme admet donc deux racines distinctes x_1 et x_2 qui sont différentes de 0 de façon évidente. **L'équation (E) admet donc trois solutions distinctes**.

3. **Réponse C :** $\boxed{F(x) = x\ln x - x}$.

Soit la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$. Cette fonction est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ F'(x) &= (x\ln x)' - x'\\ &= (x)'\ln x + x\,(\ln x)' - 1\\ &= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1\\ F'(x) &= \ln x + 1 - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ F'(x) = f(x)}$$

Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$.

4. Réponse b : $\boxed{n \geq 9}$.

En composant par la fonction $\ln$ qui est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,003 &\Longleftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < \ln 0,003\\ &\Longleftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln 0,003\end{aligned}$$

et puisque $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 < 0$ on a en divisant les deux membres par $-\ln 2$:

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow n > \frac{\ln 0,003}{-\ln 2}\\ &\Longleftrightarrow n > \frac{\ln 0,003}{-\ln 2} \approx 8{,}381\end{aligned}$$

Et puisque n est entier, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,003 \Longleftrightarrow n \geq 9}$$

Exercice 2. Obligatoire : Suite 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 20 \\ u_{n+1} & = & 0,92u_n + 3. \end{cases}$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013 + n$.

Partie A

1. **1. a. En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}. A quoi correspond ce choix d'arrondi ?**
   Les termes de la suite modélisant la situation sont exprimés en millions de ce fait, arrondir les résultats à 10^{-3} million près **correspond au nombre d'abonnés de l'opérateur arrondi au millier**.

   1. b. Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.

$$\begin{cases} u_0 & = & 20 \\ u_1 & = & 0,92\,u_0 + 3 = 21,4 \\ u_2 & = & 0,92\,u_1 + 3 = 22,688 \end{cases}$$

   Donc **le nombre d'abonnés en 2014 est de 21,4 millions et en 2015 de 22,688 millions**.

   On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout entier naturel n.

2. **Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.**
   Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 37,5 \\ &= 0,92u_n + 3 - 37,5 \\ &= 0,92u_n - 34,5 \\ &= 0,92\left(u_n - \frac{34,5}{0,92}\right) \\ &= 0,92\,(u_n - 37,5) \\ v_{n+1} &= 0,92v_n \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,92$,**
   et de premier terme $v_0 = u_0 - 37,5 = -17,5$.

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -17,5 \\ v_{n+1} & = 0,92w_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. **Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.**
   On peut donc écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ w_n = -17,5\,(0,92)^n}$$

   De l'égalité $v_n = u_n - 37,5$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n = v_n + 37,5$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5}$$

4. **Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.**
   En 2020 cela correspond à $n = 7$ donc $u_7 \approx 27,738$.
   L'opérateur aura donc en 2020 environ **27,738 millions d'abonnés**.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Par théorème

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,92 < 1$ et d'après le théorème 1 :
$$\lim_{n\to+\infty} -17,5 \times (0,92)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 37{,}5}$$

6. L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ?
La limite étant de 37,5 millions d'abonnés, il va donc dépasser, à terme, les 30 millions d'abonnés.
Remarque : En fait on a :

En 2022	:	u_9	$\approx$	$29,237$	millions d'abonnés
En 2023	:	u_{10}	$\approx$	$29,898$	millions d'abonnés
En 2024	:	u_{11}	$\approx$	$30,506$	millions d'abonnés
En 2025	:	u_{12}	$\approx$	$31,066$	millions d'abonnés

Partie B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20
	Affecter à N la valeur 0
	Tant que $\boxed{U \leq 25}$
	affecter à U la valeur $0,92 \times U + 3$
	affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\boxed{N}$

2. En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?
On constate que :

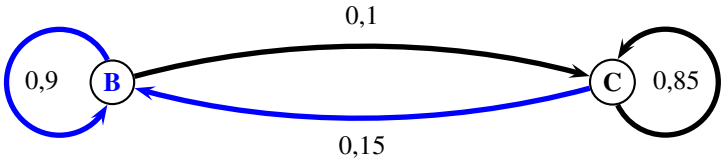
En 2017	:	u_4	$\approx$	$24,963 < 25$	(millions d'abonnés)
En 2018	:	u_5	$\approx$	$25,966 > 25$	(millions d'abonnés)

C'est donc à **partir de 2018 que l'opérateur fera des bénéfices.**

Exercice 2. Spécialité : Matrices — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. 1. a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».



1. b. Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.

- *« 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio » »*, **l'état probabiliste en 2013 est** :

$$\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$$

- La matrice de transition de ce graphe est la matrice M telle que

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{cases} b_{n+1} & = 0,9\, b_n + 0,15\, c_n \\ c_{n+1} & = 0,1\, b_n + 0,85\, c_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ P_{n+1} = P_n \times M} \ ; \ \boxed{P_n = P_0 \times M^n}$$

1. c. On donne la matrice M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,262\,5 & 0,737\,5 \end{pmatrix}.$$

En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».
Il nous faut calculer b_2 or d'après ce qui précède on a :

$$P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M^2$$

donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_0 & c_0 \end{pmatrix} \times M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,262\,5 & 0,737\,5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } b_2 = 0,375 \text{ et la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio » est } \mathbf{0,375}.}$$

1. d. Déterminer l'état stable $(b\ \ c)$ du graphe probabiliste.

Propriété 1

Pour trouver l'**état stable** par le calcul dans un système a deux états possibles, il faut résoudre l'équation

$$P = P \times M \text{ avec } P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

L'état stable $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ du graphe probabiliste est donc la solution du système :

$$\begin{aligned} P = P \times M &\iff \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x & = 0,9\,x + 0,15\,(1-x) \\ 1-x & = 0,1\,x + 0,85\,(1-x) \end{cases} \\ &\iff 0,25\,x = 0,15 \\ &\iff \boxed{x = \frac{0,15}{0,25} = 0,6} \end{aligned}$$

L'état stable du graphe probabiliste est donc

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}}$$

Remarque : On vérifie que

$$P \times M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = P$$

2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».

2. a. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	B un nombre réel
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à B la valeur $0,2$
	Affecter à C la valeur $0,8$
	Tant que $\boxed{B \leq 0,5}$
	affecter à B la valeur $0,9 \times B + 0,15 \times C$
	affecter à C la valeur $1 - B$
	affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\boxed{N}$

2. b. Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

On peut calculer les termes de la suite (b_n) en utilisant par exemple la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \begin{cases} b_n + c_n & = 1 \\ b_{n+1} & = 0,9\,b_n + 0,15\,c_n \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} b_0 & = 0,2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,;\ b_{n+1} & = 0,75\,b_n + 0,15 \end{cases}$$

Année	n	b_n
2013	0	0,2
2014	1	0,3
2015	2	0,375
2016	3	0,431 25
2017	4	0,473 437 5
2018	5	0,505 078 125
2019	6	0,528 808 594

Le nombre minimal d'années recherché est donc de 5.

Exercice 3. 5 points

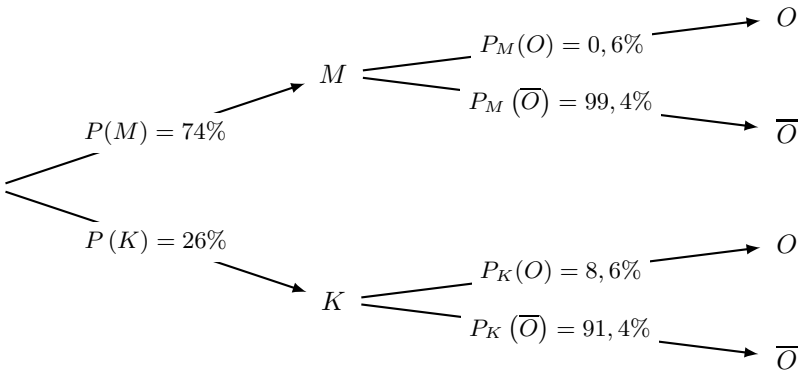
Commun à tous les candidats

Partie A

On note les évènements suivants :

- M : « la personne choisie est médecin » ;
- K : « la personne choisie est kinésithérapeute » ;
- O : « la personne choisie pratique l'ostéopathie ».

1. Reproduire l'arbre de probabilité puis le compléter.



- « *il y a 216 762 médecins en France métropolitaine parmi lesquels 0,6 % pratiquent l'ostéopathie* »
  donc $P_M(O) = 0,6\% = 0,006$;
- « *on compte 75 164 kinésithérapeutes parmi lesquels 8,6 % pratiquent l'ostéopathie,* »
  donc $P_K(O) = 8,6\% = 0,086$.

2. Montrer que la probabilité $P(O)$ de l'évènement O est égale à 0,026 8.

Les évènements K et M formant une partition de l'univers on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(O) &= P(O \cap M) + P(O \cap K)\\
P(O) &= P_M(O) \times P(M) + P_K(O) \times P(K)\\
P(O) &= 0,006 \times 0,74 + 0,086 \times 0,26
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(O) = 0{,}026\,8}$$

3. Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories. Déterminer la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute. Donner le résultat arrondi au centième.

La probabilités cherchée est $P_O(K)$ or :

$$\begin{aligned}
P_O(K) &= \frac{P(O \cap K)}{P(O)}\\
&= \frac{P_K(O) \times P(K)}{0,0268}\\
&= \frac{0,086 \times 0,26}{0,0268}
\end{aligned}$$

On a donc, arrondi au centième :

$$\boxed{P_O(K) \approx 0{,}83}$$

La probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute est donc, arrondie au centième, de $0,83$.

Partie B

On note T la variable aléatoire associant à chaque patient la durée de visite, en minutes, chez un médecin-ostéopathe. On admet que T suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 10.
Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième.

1. **Déterminer la probabilité $P(20 \leqslant T \leqslant 40)$.**
La variable T suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 10. La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-2} près :

$$\boxed{P(20 \leqslant T \leqslant 40) \approx 0{,}68}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(20, 40, 30, 10) \approx 0{,}682\,689\,480\,9$$

2. **Déterminer la probabilité qu'une visite dure plus de trois quart d'heure.**
La variable T suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 10 donc $P\left(0 < T < 30\right) = 0,5$ et alors :

$$\begin{aligned}
&P(T \geq 45) = 1 - P(0 \leq T \leq 45)\\
&P(T \geq 45) = 1 - \Big(P(0 \leq T \leq 30) + P(30 \leq T \leq 45)\Big)\\
&P(T \geq 45) = 0,5 - P(30 \leq T \leq 45)\\
&P(T \geq 45) \approx 0,07
\end{aligned}$$

La probabilité qu'une visite dure plus de trois quart d'heure est donc, arrondie au centième, de $\mathbf{0,07}$.

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$0.5 - \text{TIStat.normFDR}(30, 45, 30, 10) \approx 0{,}066\,807\,229\,2$$

Partie C

On rappelle qu'en France métropolitaine 0,6 % des médecins pratiquent l'ostéopathie. Une région compte 47 000 médecins dont 164 médecins-ostéopathes.
On note I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de médecins ostéopathes de la région.

1. **1. a. Vérifier que les conditions d'utilisation de cet intervalle sont remplies.**

Théorème 2 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est, si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

- **1. Analyse des données** :
  - « *Une région compte 47 000 médecins dont* 164 *médecins-ostéopathes.* ». Donc la fréquence observée de médecins-ostéopathes est
  $$f = \frac{164}{47\,000} \approx 0{,}003\,489 \approx \mathbf{0.3489\%}$$
  - « *En France métropolitaine* $0,6\,\%$ *des médecins pratiquent l'ostéopathie*, donc la proportion de médecins pratiquent l'ostéopathie est $p = 0,6\,\%$.

- **2. Intervalle de fluctuation** : On a $n = 47\,000$, $p = 0,6\%$ alors on sait que puisque :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 47\,000 \geq 30 \\ \checkmark & np = 47\,000 \times 0,6\% = 282 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 47\,000 \times 99,4\% = 46\,718 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions de validité sont réunies pour déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95%.

1. b. Justifier que $I = [0{,}005\,3\ ;\ 0{,}006\,7]$, les bornes ayant été arrondies à 10^{-4} près. Peut-on considérer que pour la pratique de l'ostéopathie par les médecins, cette région est représentative, privilégiée ou défavorisée par rapport à la situation en France métropolitaine ? Justifier la réponse.

- **Intervalle de fluctuation** Les conditions de validité sont réunies donc l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour la fréquence $F_{47\,000}$ est :

$$I_{47\,000} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,06 - 1,96\frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{47\,000}}\ ;\ 0,06 + 1,96\frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{47\,000}}\right]$$

Les bornes de l'intervalle sont :

$$\begin{cases} p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} & \approx 0{,}005\,301\,8 \quad : \text{ on donne la valeur approchée par défaut} \\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} & \approx 0{,}006\,698\,19 \quad : \text{ on donne la valeur approchée par excès} \end{cases}$$

soit

$$\boxed{I_{47\,000} \approx [0,0053\ ;\ 0,0067]}$$

- **Conclusion** : La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation

$$\boxed{f = \frac{164}{47\,000} \approx 0{,}003\,489 \notin I_{47\,000}}$$

donc **la région est donc défavorisée par rapport à la situation en France métropolitaine.** .

Exercice 4. 6 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

Partie A

L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1 500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur $[0\,;\,15]$ par $g(x) = 18x + \mathrm{e}^{0,5x-1}$. Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g.

La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,15]$ comme composée de fonctions qui le sont sur $[0\,;\,15]$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\,;\,15]\,;\ g'(x) &= (18x)' + \left(\mathrm{e}^{0,5x-1}\right)' \\ g'(x) &= 18 + (0,5x-1)'\ \mathrm{e}^{0,5x-1} \\ g'(x) &= 18 + 0,5\ \mathrm{e}^{0,5x-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,15]\,;\ g'(x) = 18 + 0,5\ \mathrm{e}^{0,5x-1}}$$

2. Justifier que g est strictement croissante sur $[0\,;\,15]$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ de ce fait pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,15]$:

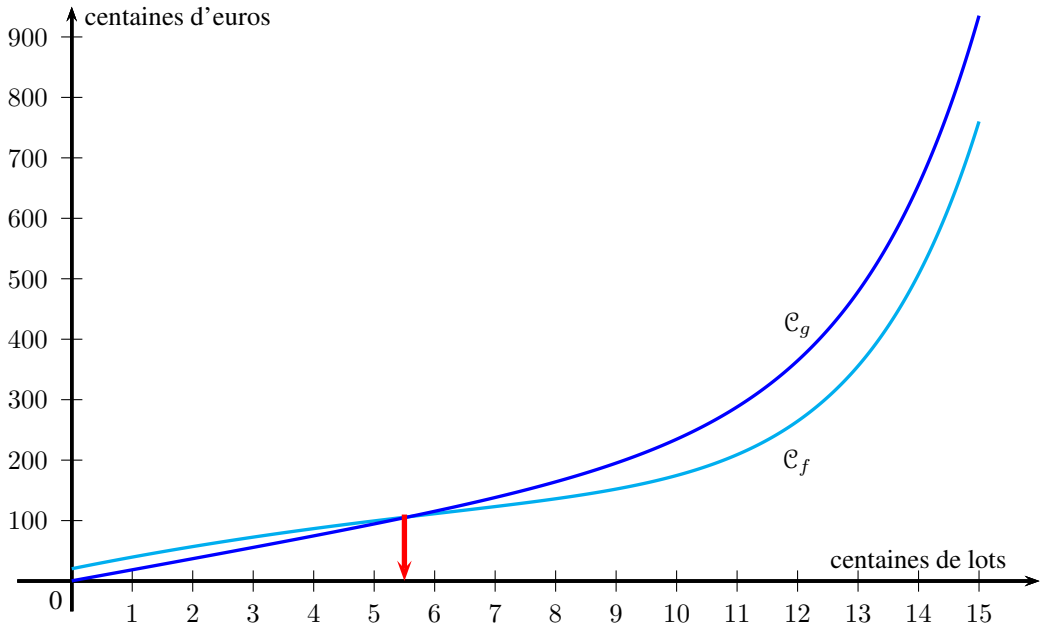
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{0,5x-1} &> 0 \\ 18 + \mathrm{e}^{0,5x-1} &> 18 > 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,15]\,;\ g'(x) > 0}$$

et **g est donc strictement croissante sur $[0\,;\,15]$**.

Partie B

L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,15]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20$. Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On note $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ les représentations graphiques respectives des fonctions g et f.



1. Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ à partir de $x \approx 5,5$. L'encadrement cherché est donc $\boxed{500 \leq k \leq 600}$.

2. On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.

2. a. Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leqslant 0$.
Pour déterminer k on cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ceux de $\mathcal{C}_g$ sur $[0\,;\,15]$. Cela revient donc à résoudre sur cet intervalle l'inéquation $f(x) \leq g(x)$, soit :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\ ;\ 15]\ ;\ f(x) \leq g(x) &\iff \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20 \leq 18x + \mathrm{e}^{0,5x-1}\\ &\iff \boxed{-x^2 + 2x + 20 \leqslant 0}\end{aligned}$$

2. b. Résoudre cette inéquation sur l'intervalle [0 ; 15].

$$\forall x \in [0\ ;\ 15]\ ;\ f(x) \leq g(x) \iff -x^2 + 2x + 20 \leqslant 0$$

On calcule alors le discriminant du polynôme du second degré :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 20 = 84 > 0$$

Les racines sont donc

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{\Delta}}{-2} = 1 - \sqrt{21} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \sqrt{21}$$

Et puisque le coefficient de x^2 est négatif, $-x^2 + 2x + 20$ est négatif à l'extérieur des racines soit :

x	0		$x_2 = 1 + \sqrt{21}$		15
signe de $\left(-x^2 + 2x + 20\right)$		$+$	0	$-$	

Et donc

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 15]\ ;\ f(x) \leq g(x) \iff x \in \left[1 + \sqrt{21}\ ;\ 15\right]}$$

2. c. En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

$$1 + \sqrt{21} \approx 5,583$$

L'entreprise doit donc produire **au moins 559 lots** avec cette nouvelle machine pour diminuer le coût total de production.

3. On rappelle que le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f'. Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.
La valeur moyenne du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{8-5}\int_5^8 f'(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}(f(8) - f(5))\\ &= \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3 + 116 - \mathrm{e}^{1,5} - 95\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3 + 21 - \mathrm{e}^{1,5}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{8-5}\int_5^8 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3 + 21 - \mathrm{e}^{1,5}\right) \approx 12,20}$$

La valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots est donc de 12,20 centaines d'euros soit de **1 220 euros**.