Baccalauréat 2015 - ES/L Polynésie

Série ES/L Obli. et Spé.
12 Juin 2015
Correction

Math93.com
MathExams.fr

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Exercice 1. QCM 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 (Réponse c)

1. Soit la fonction g définie pour tout nombre réel x strictement positif par : $g(x) = 2\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{2}\ln(x)$

Si g' désigne la fonction dérivée de g, on a :

a. $g'(x) = 2\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{x}$ **b.** $g'(x) = 6\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{x}$ **c.** $g'(x) = 6\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{2x}$ **d.** $g'(x) = 6\mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{2x}$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, composée et produit de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ g'(x) = 2\left(\mathrm{e}^{3x}\right)' + \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)'$$

Et par dérivation de la fonction exponentielle composée : $(e^u)' = u'e^u$; u dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 2 \times 3 \times \mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ g'(x) = 6\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2x}}$$

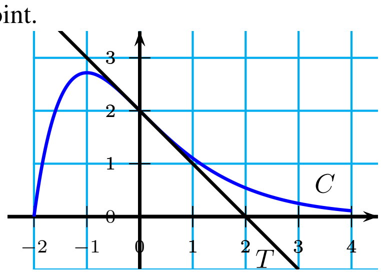
Et donc la bonne réponse est la réponse c :

Question 2 (Réponse d)

2. La courbe représentative C d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$ est donnée ci-dessous. La tangente T à la courbe au point d'abscisse 0 traverse la courbe en ce point.

La fonction f est convexe sur l'intervalle :

a. $[-1\ ;\ 4]$
b. $[-2\ ;\ 0]$
c. $[-2\ ;\ -1]$
d. $[0\ ;\ 4]$



En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Ici la fonction f est *convexe* sur $[0\ ;\ 4]$ car sa courbe représentative est *au-dessus* de chacune de ses tangentes sur cet intervalle et *concave* sur $[-2\ ;\ 0]$ car sa courbe représentative est *au-dessous* de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.
Et donc la bonne réponse est la réponse d :

Question 3 (Réponse c)

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

La valeur affichée en sortie de cet algorithme est :
a. 7,1
b. 7,6
c. 8
d. 17

Variables
n : un nombre entier naturel
Traitement
Affecter à n la valeur 0
Tant que $1,9^n < 100$
Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher n

La variable n est un entier ce qui exclu les deux premières propositions. Il suffit alors de tester les deux valeurs :

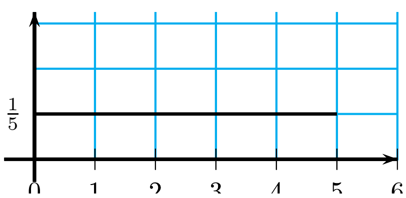
- Si $n = 8$, alors $1,9^n = 1,9^8 \approx 169,8 > 100$
- On vérifie bien que le terme précédent est inférieur à 100. On a : $1,9^7 \approx 89,4 < 100$
- Le cas $n = 17$ donnera évidement un terme plus grand que 100 mais ce ne sera pas le premier à réaliser la condition.

Et donc la bonne réponse est la réponse c :

Question 4 (Réponse c)

4. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ dont la fonction de densité est représentée ci-dessous. On a alors :

a. $P(X \geqslant 3) = P(X < 3)$
b. $P(1 \leqslant X \leqslant 4) = \dfrac{1}{3}$
c. $E(X) = \dfrac{5}{2}$
d. $E(X) = \dfrac{1}{5}$



Propriété 1

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [a ; b].

$$\forall x \in [a\ ;\ b]\ ;\ P\left(a \leq X \leq x\right) = \frac{x-a}{b-a} \quad : \quad (1) \qquad \text{et} \qquad E(X) = \frac{b+a}{2} \quad : \quad (2)$$

La variable X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,5]$. Par conséquent $\boxed{E(X) = \dfrac{5+0}{2} = \dfrac{5}{2}}$.

Et donc la bonne réponse est la réponse c :

Exercice 2. Obligatoire ES et L : Probabilités 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A - Étude de l'efficacité du traitement

On prélève au hasard 100 fruits sur la partie du champ traité et 100 fruits sur l'autre partie du champ. On constate que :

- sur l'échantillon des 100 fruits traités, 18 sont abimés ;
- sur l'échantillon des 100 fruits non traités, 32 sont abimés.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion de fruits abimés par au niveau de confiance de 95 % :

1. a. pour la partie du champ traitée ;

- **1. Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 100$ *, il est constaté que* $f = 18\ \%$ *de fruits sont abimés.* ».
- **2. Intervalle de confiance** :

Théorème 1 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p.

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 100$, $f = 18\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 100 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 100 \times 0{,}18 = 18 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 100 \times 0{,}82 = 82 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}18 - \frac{1}{\sqrt{100}} \ ; \ 0{,}18 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right]$$

$$\boxed{I_1 = [0{,}08 \ ; \ 0,28]}$$

1. b. pour la partie du champ non traitée.

- **1. Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 100$ *, il est constaté que* $f = 32\ \%$ *de fruits sont abimés.* ».
- **2. Intervalle de confiance** :
  On a pour le cas étudié, $n = 100$, $f = 32\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 100 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 100 \times 0{,}32 = 32 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 100 \times 0{,}68 = 68 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}32 - \frac{1}{\sqrt{100}} \ ; \ 0{,}32 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right]$$

$$\boxed{I_2 = [0{,}22 \ ; \ 0,42]}$$

1. c. Au vu des intervalles obtenus à la question 1, peut-on considérer que le traitement est efficace ?

On a montré que les intervalle de confiance, au seuil 95% sont de :

- Pour la partie traitée : $I_1 = [0,08\,;\,0,28]$;
- Pour la partie non traitée : $I_2 = [0,22\,;\,0,42]$

Les intervalles ont une intersection non vide,

$$I_1 \cap I_2 = [0,22\,;\,0,28]$$

Donc il y a une part d'indécision.

Par exemple, la proportion p_1 de fruits abimées parmi les fruits traités pourrait être de $p_1 = 0,27$ et p_2 la proportion de fruits abimées parmi les fruits non traités de $p_2 = 0,23 < p_1$.

On ne peut pas considérer que le traitement est efficace.

Partie B - Qualité de la production

On prélève au hasard un fruit récolté dans le champ et on note :

- T l'évènement « Le fruit prélevé provient de la partie traitée » ;
- A l'évènement « Le fruit prélevé est abimé ».

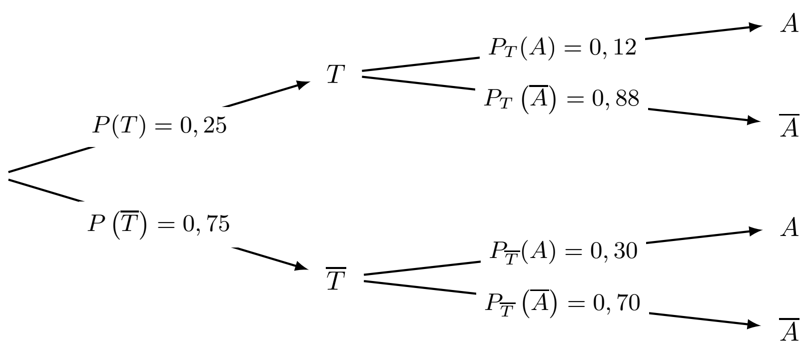
On arrondira les résultats au millième.

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

Avec les notations de l'exercice :

- $P_T(A) = 0,12$ car « *Une étude plus poussée permet d'estimer la proportion de fruits abimés à* $0,12$ *dans la partie du champ traitée* » ;
- $P_{\overline{T}}(A) = 0,30$ car « *La proportion de fruits abimés est estimée à* $0,30$ *dans la partie non traitée.* »
- $P(T) = 0,25$ car « *On sait de plus qu'un quart du champ a été traité.* »

On a donc l'arbre de probabilités suivant :



2.

2. a. Calculer la probabilité que le fruit prélevé soit traité et abimé.

On cherche la probabilité $P(A \cap T)$ soit :

$$P(A \cap T) = P_T(A) \times P(T) = 0,12 \times 0,25$$

Donc

$$\boxed{P(A \cap T) = 0,03}$$

2. b. Montrer que $P(A) = 0,255$.

On cherche $P(A)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap T) + P\left(A \cap \overline{T}\right) \\
P(A) &= P(T) \times P_T(A) + P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(A) \\
P(A) &= 0{,}25 \times 0{,}12 + 0{,}75 \times 0{,}3 \\
P(A) &= 0{,}03 + 0{,}225
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{P(A) = 0{,}255}$$

©ISSN 2272-5318

3. Un fruit prélevé au hasard dans la récolte est abimé, Peut -on affirmer qu'il y a une chance sur quatre pour qu'il provienne de la partie du champ traitée ?

On va calculer $P_A(T)$ en utilisant les résultats des questions **B2a.** et **B2b.**

$$P_A(T) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,255}$$

Soit en arrondissant au millième :

$$\boxed{P_A(T) \approx 0,118 \neq 0,25}$$

On ne peut donc pas affirmer qu'il y a une chance sur quatre pour qu'il provienne de la partie du champ traitée.

4. Dans le but d'effectuer un contrôle, cinq fruits sont prélevés au hasard dans le champ. Calculer la probabilité qu'au plus un fruit soit abimé.

- **Modélisation**

  Vérifions les hypothèses de validation d'une *loi binomiale*.

  - Un fruita *2 états* : il est abimé ou il ne l'est pas. La probabilité d'être abimé est : $p = 0,255$.
  - Il y a 5« tirages ». Chaque tirage est *indépendant, identique* et *aléatoire*.

  De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 5 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0,255$.

  La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,255$, notée $\mathscr{B}(5\ ;\ 0,255)$.

- **Calcul**

  Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,255$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{k} \times 0,255^k \times (0{,}745)^{5-k}$$

  La probabilité qu'au plus un fruit soit abimé se traduit par $P(X \leq 1)$ or :

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$P(X \leq 1) = \binom{5}{0} \times 0,255^0 \times (0{,}745)^{5-0} + \binom{5}{1} \times 0,255^1 \times (0{,}745)^{5-1}$$
$$P(X \leq 1) = 1 \times 1 \times (0{,}745)^5 + 5 \times 0,255^1 \times (0{,}745)^4$$

  Donc :

$$\boxed{P(X \leq 1) \approx 0,622}$$

  Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.binomFdR}(5; 0,255; 1) \approx 0{,}622\,266\,556\,263$$

- **Conclusion**

  La probabilité qu'au plus un fruit soit abimé est d'environ $0,622$.

Exercice 2. Spécialité Maths ES — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3		Tableau 2	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		Poste 1	25 €/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		Poste 2	20 €/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. a. Donner la matrice produit $P = H \times C$.

$$P = H \times C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$P = H \times C = \begin{pmatrix} 8 \times 25 + 10 \times 20 + 14 \times 15 \\ 6 \times 25 + 6 \times 20 + 10 \times 15 \\ 12 \times 25 + 10 \times 20 + 18 \times 15 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P = H \times C = \begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix}}$$

1. b. Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

La matrice C est celle de coûts horaires par poste et H celle des heures par poste et par modèle.
Les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent donc aux prix de revient des différents modèles de planches de surf.

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

2. a. Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système : $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$

On a montré lors de la question **1b.** que les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent aux prix de revient des différents modèles de planches de surf.

Or ici la matrice de coûts horaires par poste devient $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et celle des prix de revient par modèle $P = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 60 \end{pmatrix}$.

La matrice H restant inchangée, les prix de revient par modèle sont déterminés par :

$$H \times C = P$$

Les réels a, b et c doivent être solutions du système :

$$\boxed{H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}}$$

2. b. Déterminer les réels a, b et c.

Remarque : question assez inhabituelle puisque la matrice inverse de H n'est pas donnée. On va supposer que l'utilisation de la calculatrice est autorisée pour résoudre le système.

On suppose connu le fait que la matrice H est inversible, dans ce cas on a :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

La calculatrice nous donne alors directement H^{-1} :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0.75 & -1.5 & 0.25 \\ -0.75 & 2.5 & -0.75 \end{pmatrix}$$

De ce fait :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0.75 & -1.5 & 0.25 \\ -0.75 & 2.5 & -0.75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 12,5 \\ 12,5 \end{pmatrix}}$$

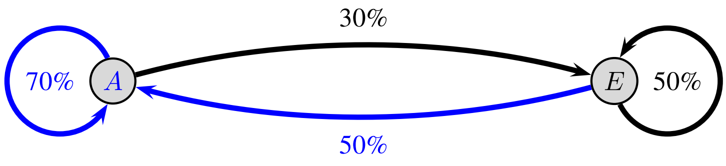
Partie B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

- les spots s'allument tous à 22 heures ;
- toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1. 1. a. Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.



1. b. Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A, E) associée au graphe.

La première ligne de la matrice nous donne les probabilités "d'aller" de A vers A et de A vers E. La deuxième ligne de la matrice donne les probabilités "d'aller" de E vers A et de E vers E.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}}$$

2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint. On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

2. a. Justifier que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Écrire une relation entre P_0 et P_n.

Si $n = 0$, alors on se place pile à 22 heures et donc tous les spots sont allumés. Par conséquent

$$\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0}$$

Puisque pour tout entier n, la suite de matrice vérifie la relation de récurrence

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

Alors d'après une propriété du cours :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; P_n = P_0 \times M^n}$$

2. b. Déterminer les coefficients de la matrice P_3. Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?

On a :

$$\begin{aligned}
P^3 &= P_0 \times M^3 \\
P^3 &= (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}^3 \\
P^3 &= (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \\ 0,62 & 0,38 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P^3 = (0,628 \quad 0,372)}$$

La matrice P^3 correspond à l'état des spots après 3 intervalles de 10 secondes, donc à 22 heures et 30 secondes.
La probabilité qu'un spot soit éteint à 22 heures et 30 secondes est donc de <u>0,372</u>.

3. Déterminer l'état stable $(a \quad b)$ du graphe probabiliste.

Propriété 2

Pour trouver l'**état stable** par le calcul dans un système a deux états possibles, il faut résoudre l'équation

$$S = S \times M \text{ avec } S = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

L'état stable $S = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ du graphe probabiliste est donc la solution du système :

$$\begin{aligned}
S = S \times M &\iff \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x &= 0,7\,x + 0,5\,(1-x) \\ 1-x &= 0,3\,x + 0,5\,(1-x) \end{cases} \\
&\iff 0,8\,x = 0,5 \\
&\iff \boxed{x = \frac{0,5}{0,8} = 0,625}
\end{aligned}$$

L'état stable du graphe probabiliste est donc

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}}$$

Remarque : On vérifie que

$$P \times S = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,5 \end{pmatrix} = P$$

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Suites — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10 mg.l^{-1}. On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n), le terme en donnant une estimation de la concentration du produit, en mg.$^{-1}$, au début de la n-ième semaine. On a $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$.

La $(n+1)$-ième semaine, la concentration C_{n+1} sera obtenue en retirant 10%, donc en gardant 90% de C_n, la concentration de la semaine précédente, auquel on ajoutera 10 mg.l^{-1}. De ce fait :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10}$$

2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = C_n - 100$.

2. a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et que $V_0 = 60$.

Les suites (C_n) et (V_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(C_n) : \begin{cases} C_0 & = 160 \\ C_{n+1} & = 0{,}9 \times C_n +\ 10 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (V_n) : \begin{cases} V_0 & \\ V_n & = C_n -\ 100 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= C_{n+1} - 100 \\ V_{n+1} &= (0{,}9\, C_n +\ 10)\ - 100 \\ V_{n+1} &= 0{,}9 \times C_n - 90 \\ V_{n+1} &= 0{,}9 \times \left(C_n + \frac{-90}{0{,}9} \right) \\ V_{n+1} &= 0{,}9 \times (C_n - 100) \\ V_{n+1} &= 0{,}9 \times V_n \end{aligned}$$

La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $V_0 = 60$ puisque :

$$\begin{aligned} V_0 &= C_0 - 100 \\ V_0 &= 160 - 100 \\ V_0 &= 60 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(V_n) : \begin{cases} V_0 & = 60 \\ V_{n+1} & = 0{,}9 \times V_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Exprimer V_n en fonction de n.

La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $V_0 = 60$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_n = V_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_n = 60 \times (0{,}9)^n}$$

2. c. En déduire que pour tout entier naturel n, $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$V_n = C_n - 100$$

On peut en déduire l'expression :

$$C_n = V_n + 100$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; C_n = 60 \times (0{,}9)^n + 100}$$

3.

3. a. Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini. Justifier la réponse. Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,9 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} 60 \times (0,9)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (C_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} C_n = 100}$$

Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.

Au bout d'un grand nombre de semaines, la concentration du produit se stabilisera à 100 mg.l^{-1}.

3. b. Au bout de combien de semaines la concentration devient -elle inférieure à 140 mg.l $^{-1}$?

On va résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inégalité $C_n < 140$ puis considéré le plus petit entier solution.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} C_n = 60 \times (0,9)^n + 100 < 140 &\iff 60 \times (0,9)^n < 40 \\ &\iff 0,9^n < \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $\ln$ définie et croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$60 \times (0,9)^n + 100 < 140 \iff \ln 0,9^n < \ln \frac{2}{3}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$60 \times (0,9)^n + 100 < 140 \iff n \ln 0,9 < \ln \frac{2}{3}$$

En divisant chaque membre par $\ln 0,9 < 0$, l'ordre change et :

$$60 \times (0,9)^n + 100 < 140 \iff n > \frac{\frac{2}{3}}{\ln 0,9} \approx 3,8$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 4.

$$\boxed{S = \{4\,;\,5\,;\,6\,;\,\cdots\,;\,+\infty\}}$$

Le plus petit entier vérifiant cette inégalité est donc $n = 4$.

La concentration devient inférieure à 140 mg.l $^{-1}$ au bout de 4 semaines.

4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

On voulait intervenir après 6 semaines. Ce réglage ne convient donc pas .

Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mg.l^{-1}. Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?

Puisque de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mg.l^{-1}, la suite (C_n) devient :

$$(C_n) : \begin{cases} C_0 & = 160 \\ C_{n+1} & = 0,9 \times C_n + 12 \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

On peut alors calculer des valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	160	156	152,4	149,16	146,244	143,6196	141,25764	139,131876

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

> **Condition 1** : la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
> **Condition 2** : la quantité de produit consommée soit minimale.

Vérifions les deux conditions :

- La première condition est donc bien remplie puisque :

$$C_6 \approx 141,26 > 140 \text{ et } C_7 \approx 139,13 < 140$$

  la concentration du produit est conforme aux recommandations (entre 140 et 180 mg.l^{-1}) sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- Concernant la deuxième condition, l'énoncé ne précise pas si la quantité de produit consommé est un nombre entier exprimé en mg.l^{-1}. En prenant des valeurs inférieures à 12mg.l^{-1} comme $b = 11,8$ ou $b = 11,78$ par exemple, on a encore $C_6 > 140$ et $C_7 < 140$ comme le montre l'étude ci-après. On peut considérer que cette condition n'est donc pas remplie avec la valeur de 12mg.l^{-1}.

Par exemple on obtient avec d'autres valeurs de la quantité b ajoutée :

$$(C_n) : \begin{cases} C_0 & = 160 \\ C_{n+1} & = 0,9 \times C_n + b \end{cases} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C_n avec $b =$ 11,6	160	155,6	151,64	148,076	144,8684	141,98156	139,383404	137,0450636	134,9405572
C_n avec $b =$ 11,7	160	155,7	151,83	148,347	145,2123	142,39107	139,851963	137,5667667	135,51009
C_n avec $b =$ 11,8	160	155,8	152,02	148,618	145,5562	142,80058	140,320522	138,0884698	136,0796228
C_n avec $b =$ 11,9	160	155,9	152,21	148,889	145,9001	143,21009	140,789081	138,6101729	136,6491556
C_n avec $b =$ 12	160	156	152,4	149,16	146,244	143,6196	141,25764	139,131876	137,2186884

Les cas $b = 11,8$ et $b = 11,9$ conviennent aussi puisque $C_6 > 140$ et $C_7 < 140$.
On peut encore affiner :

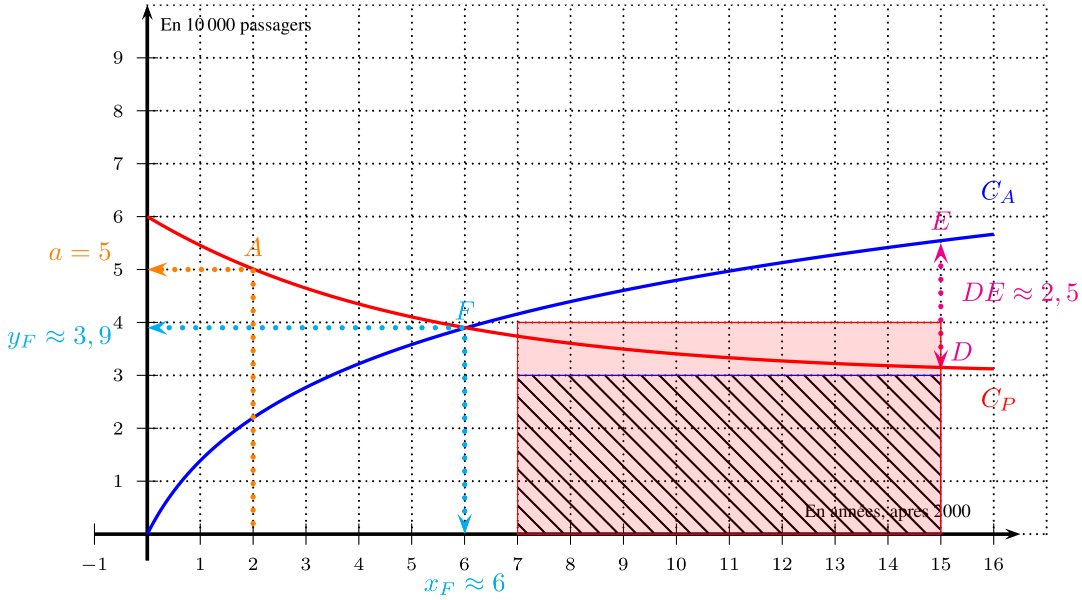
n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n avec $b =$ 11,7	160	155,7	151,83	148,347	145,2123	142,39107	139,851963	137,5667667
C_n avec $b =$ 11,71	160	155,71	151,849	148,3741	145,24669	142,432021	139,8988189	137,618937
C_n avec $b =$ 11,72	160	155,72	151,868	148,4012	145,28108	142,472972	139,9456748	137,6711073
C_n avec $b =$ 11,73	160	155,73	151,887	148,4283	145,31547	142,513923	139,9925307	137,7232776
C_n avec $b =$ 11,74	160	155,74	151,906	148,4554	145,34986	142,554874	140,0393866	137,7754479
C_n avec $b =$ 11,75	160	155,75	151,925	148,4825	145,38425	142,595825	140,0862425	137,8276183
C_n avec $b =$ 11,76	160	155,76	151,944	148,5096	145,41864	142,636776	140,1330984	137,8797886

Les cas $b = 11,74$ et $b = 11,75$... conviennent aussi puisque $C_6 > 140$ et $C_7 < 140$.

Exercice 4. Fonctions 5 points

Commun à tous les candidats

Lorsque x représente le temps en année à partir de l'année 2000, $P(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Privilège* et $A(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Avantage*.



Partie A

Dans cette partie, les estimations seront obtenues par lecture graphique.

1. Donner une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule *Privilège*.
On lit l'ordonnée du points A de C_P d'abscisse 2, soit $= 5$.
Une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule *Privilège* est donc :

$$\boxed{a \times 10\,000 \approx 50\,000}$$

2. Donner une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*.
On lit l'écart des ordonnées entre les points D et E de C_P et C_A d'abscisses 15.
Une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule est *Privilège*

$$\boxed{DE \times 10\,000 \approx 25\,000}$$

3. Comment peut-on interpréter les coordonnées du point d'intersection des deux courbes au regard de la situation proposée ?
L'abscisse du point F, point d'intersection des deux courbes nous indique au bout de combien d'années, après 2000, les deux formules auront été choisies à parts égales par les passagers. On lit $x_F \approx 6$ et $y_F \approx 3,9$ donc environ 39 000 passagers auront choisi chacune des deux formules après 6 années à partir de 2000.

4. Justifier que la compagnie aérienne peut, selon ce modèle, estimer que le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.
Le nombre total de passager ayant choisi la formule durant la période entre 2007 et 2015 correspond à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_p et les droites d'équation $x = 7$ et $x = 15$. Cette aire est comprise entre celle d'un rectangle de hauteur 3 (dizaines de mille) et de longueur 8 soit 240 000 passagers et celle d'un rectangle de hauteur 4 (dizaines de mille) et de longueur 8 soit 320 000 passagers. Le nombre total de passagers sur cette période est donc compris entre 240 000 et 320 000.

Partie B

On admet que la fonction A est définie sur l'intervalle [0 ; 16] par $A(x) = 2\ln(x+1)$ et que la fonction P est définie sur l'intervalle [0 ; 16] par $P(x) = 3 + 3\mathrm{e}^{-0,2x}$.
On s'intéresse à la différence en fonction du temps qu'il y a entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*.
Pour cela, on considère la fonction E définie sur l'intervalle [0 ; 16] par $E(x) = A(x) - P(x)$.

1. On note E' la fonction dérivée de E sur l'intervalle [0 ; 16].

1. a. On admet que $E'(x) = \dfrac{2}{x+1} + 0,6\mathrm{e}^{-0,2x}$. Justifier que E' est strictement positive sur l'intervalle [0 ; 16].

La fonction dérivée E' s'exprime comme une somme de deux termes.

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle [0 ; 16] :
$$\left(0,6\mathrm{e}^{-0,2x}\right) > 0$$
Le deuxième terme, est positif strictement.
- En outre, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 16], on a :
$$(x+1) \in [1\,;\,17]$$
Le premier terme, $\dfrac{2}{x+1}$ est donc aussi strictement positif.
- La fonction dérivée E' est donc une somme de deux termes strictement positifs, elle est strictement positive.

1. b. Dresser le tableau de variation de la fonction E sur l'intervalle [0 ; 16].

On a montré que la fonction dérivée E' était strictement positive sur [0 ; 16] donc la fonction E est croissante sur cet intervalle.
On calcule les valeurs aux bornes :

x	0	16
$E(x)$	-6	$E(16) \approx 2.54$

x	0	16
Signe de $E'(x)$	+	
E	-6 ↗	$E(16) \approx 2.54$

2. 2. a. Montrer que l'équation $E(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle [0 ; 16]. Donner la valeur de α en arrondissant au dixième.

Théorème 3 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

©ISSN 2272-5318

Application du corollaire :

- La fonction E est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$;
- L'image par E de l'intervalle $[0\ ;\ 16]$ est $[-6\ ;\ E(16)]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car :

$$-6 < 0 < g\,(16) \approx 2,54$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $E(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$.

Valeur approchée de α.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
Avec un pas de $\Delta = 0,1$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} E(6.0) & \approx & -0,0118 < 0 \\ E(6.1) & \approx & 0,0345 > 0 \end{array}\right. \text{, donc } 6,0 < \alpha < 6,1.$$

Une valeur approchée de α au dixième est donc $\alpha \approx 6,0$.

2. b. Dresser le tableau de signes de la fonction E sur l'intervalle [0 ; 16]. Interpréter les résultats obtenus au regard des deux formules proposées par la compagnie aérienne.
On a :

x	0	α	16
Signe de $E'(x)$		$+$	
E	-6	0	$E(16) \approx 2.54$

Donc le tableau de signe de E s'en déduit :

x	0		α		16
signe de $E(x) = A(x) - P(x)$		$-$	0	$+$	

Puisque E traduit à la différence en fonction du temps qu'il y a entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège* on a :

- De 2000 à 2006 :
$$E(x) = A(x) - P(x) < 0 \Longleftrightarrow A(x) < P(x)$$
La formule *Privilège* sera adoptée par plus de passagers que la formule *Avantage*.
- En 2006, autant de passagers choisiront les deux formules ;
- De 2006 à 2016 :
$$E(x) = A(x) - P(x) > 0 \Longleftrightarrow A(x) > P(x)$$
La formule *Avantage* sera adoptée par plus de passagers que la formule *Privilège*.