



Math93.com

Baccalauréat 2016 - ES/L Métropole

Série ES/L Obli. et Spé.
22 Juin 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter



Exercice 1. QCM

4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 (Réponse b)

Un organisme de formation désire estimer la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013. Pour cela, il interroge un échantillon représentatif de 300 stagiaires. On constate que 225 sont satisfaits. Alors, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013 est :

- a. [0,713 ; 0,771] b. [0,692 ; 0,808] c. [0,754 ; 0,813] d. [0,701 ; 0,799]

Preuve

- 1. **Analyse des données** : « Sur un échantillon de $n = 300$ stagiaires. Il est constaté que 225 sont satisfaits. ». Donc la fréquence observée de stagiaires satisfaits est $f = 225 \div 300 = 0,75$ soit $f = 0,75$
- 2. **Intervalle de confiance** :

Théorème 1 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p .

Si les conditions suivantes sont remplies :
$$\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 300$, $f = 0,75$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 300 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 300 \times \frac{225}{300} = 225 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 300 \times \frac{75}{300} = 75 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{225}{300} - \frac{1}{\sqrt{300}} ; \frac{225}{300} + \frac{1}{\sqrt{300}} \right]$$

Soit puisque les bornes sont :

- $\frac{225}{300} - \frac{1}{\sqrt{300}} \approx 0,69226$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit 0,692.
- $\frac{225}{300} + \frac{1}{\sqrt{300}} \approx 0,80774$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit 0,808.

$$I_{300} \approx [0,692 ; 0,808]$$

- Conclusion** : la réponse à la question 1 est la réponse b.

**Question 2 (Réponse d)**

En suivant la loi uniforme, on choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[4; 11]$. La probabilité que ce nombre soit inférieur à 10 est :

a. $\frac{6}{10}$

b. $\frac{10}{7}$

c. $\frac{10}{11}$

d. $\frac{6}{7}$

Preuve**Propriété 1**

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.

$$\forall x \in [a; b]; P(a \leq X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} : (1) \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{b+a}{2} : (2)$$

Donc si la variable aléatoire X la loi uniforme sur l'intervalle $[4; 11]$ on a :

$$P(X < 10) = P(4 \leq X < 10) = \frac{10-4}{11-4} = \frac{6}{7}$$

La réponse à la question 2 est la réponse d.

Question 3 (Réponse d)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

a. $-2e^{-2x+3}$

b. e^{-2x+3}

c. $(-2x+3)e^{-2x+3}$

d. $(-2x-1)e^{-2x+3}$

Preuve

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (x+1) \times e^{-2x+3} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = u(x) \times v(x) : \begin{cases} u(x) = (x+1) & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-2x+3} & ; & v'(x) = (-2e^{-2x+3}) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 1 \times e^{-2x+3} + (x+1) \times (-2e^{-2x+3}) \\ f'(x) &= e^{-2x+3} + (-2x-2)e^{-2x+3} \\ f'(x) &= e^{-2x+3}(1-2x-2) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+3}}$$

La réponse à la question 3 est la réponse d.

**Question 4 (Réponse c)**

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée f' soit aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe ci-contre représente la fonction f'' . On peut alors affirmer que :

- a. f est convexe sur $[-2 ; 2]$. b. f est concave sur $[-2 ; 2]$.
c. La courbe représentative de f sur $[-2 ; 2]$ admet un point d'inflexion. d. f' est croissante sur $[-2 ; 2]$.

Preuve

En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

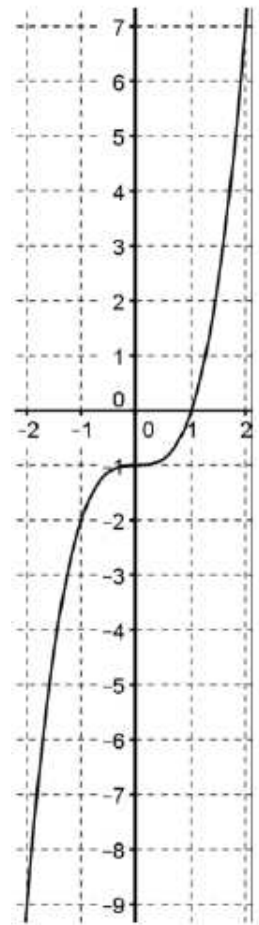
- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

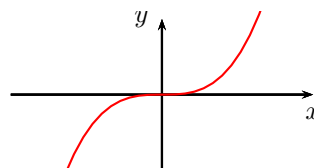
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

f est *convexe* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs *positives ou nulles*.
 f est *concave* si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs *négatives ou nulles*.

- Sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, la fonction dérivée seconde dont on a la représentation graphique n'est pas de signe constant. Elle n'est donc ni convexe, ni concave sur cet intervalle.
- Par le même argument, f' n'est pas croissante sur cet intervalle puisque f'' est négative puis positive.
- La seule possibilité à la question 4 est donc la réponse c.
En effet la dérivée seconde s'annule et change de signe en 1. La fonction f admet donc un point d'inflexion en 1.

**Définition 1 (Point d'inflexion d'une fonction numérique)**

- Si, en un point de la courbe représentative d'une fonction continue, la concavité passe du type « convexe » au type « concave » (ou l'inverse), on appelle ce point, **point d'inflexion de la courbe**.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- En un point d'inflexion, la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe.



**Exercice 2. Obligatoire - Suites****5 points****Candidats n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de la série L**

[...] Afin d'entretenir son parc automobile, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25% de son parc et d'acheter 3 000 voitures neuves. On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite : Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année 2015 + n . On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$.

Le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année 2015 + $(n + 1)$, soit u_{n+1} s'obtient en effectuant une réduction de 25% des u_n voitures de l'année précédente, et en ajoutant 3 000 voitures neuves. Diminuer de 25%, c'est multiplier par 0,75 donc on obtient, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$$

2. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 12\,000$.**2. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser le premier terme.**

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 10\,000 \\ u_{n+1} &= 0,75 \times u_n + 3\,000 \end{cases} \quad \left| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 &= u_0 - 12\,000 \\ v_n &= u_n - 12\,000 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12\,000 \\ v_{n+1} &= (0,75 u_n + 3\,000) - 12\,000 \\ v_{n+1} &= 0,75 \times u_n - 9\,000 \\ v_{n+1} &= 0,75 \times \left(u_n + \frac{-9\,000}{0,75} \right) \\ v_{n+1} &= 0,75 \times (u_n - 12\,000) \\ v_{n+1} &= 0,75 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,75$, et de premier terme $v_0 = -2\,000$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 12\,000 \\ v_0 &= 10\,000 - 12\,000 \\ v_0 &= -2\,000 \end{aligned}$$

Soit :

$$(v_n) : \begin{cases} v_0 &= -2\,000 \\ v_{n+1} &= 0,75 \times v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

2. b. Exprimer v_n en fonction de n . Déterminer la limite de la suite (v_n) .

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,75$, et de premier terme $v_0 = -2\,000$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = -2\,000 \times (0,75)^n$$

Par théorème

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,75 < 1$ et d'après le théorème 3 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} -2\,000 \times (0,75)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (v_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$



2. c. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 12\,000$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 12\,000$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = -2\,000 \times (0,75)^n + 12\,000}$$

2. d. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

Lors de la question (2.b.) on a montré que la suite (v_n) tendait vers 0 en $+\infty$. Puisque pour tout entier n on a : $v_n = u_n - 12\,000$, on en conclut que la suite (u_n) tend vers 12 000 en $+\infty$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \\ v_n = u_n - 12\,000 \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12\,000$$

Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre de voitures que comptera le parc automobile se stabilisera autour de 12 000.

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante. On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

3. a. Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

INITIALISATION :	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $U < 11\,950$ faire N prend la valeur $N + 1$ U prend la valeur $0,75U + 3\,000$ Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

3. b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

Avec la calculatrice on obtient :

$$u_{12} \approx 11\,937 < 11\,950 \text{ et } u_{13} \approx 11\,952 > 11\,950$$

L'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures est donc $2015 + 13 = \underline{2028}$.

3. c. Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation $12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n \geq 11\,950$.

Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} -2\,000 \times 0,75^n + 12\,000 &\geq 11\,950 \iff -2\,000 \times 0,75^n \geq -50 \\ &\iff 0,75^n \leq \frac{-50}{-2\,000} = \frac{1}{40} \end{aligned}$$

En composant par la fonction $x \mapsto \ln x$ définie et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$-2\,000 \times 0,75^n + 12\,000 \geq 11\,950 \iff \ln 0,75^n \leq \ln \frac{1}{40}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$-2\,000 \times 0,75^n + 12\,000 \geq 11\,950 \iff n \ln 0,75 \leq \ln \frac{1}{40}$$



En divisant chaque membre par $\ln 0.75 < 0$, l'ordre change et :

$$-2\,000 \times 0.75^n + 12\,000 \geq 11\,950 \iff n \geq \frac{\ln \frac{1}{40}}{\ln 0.75} \approx 12.82$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 13.

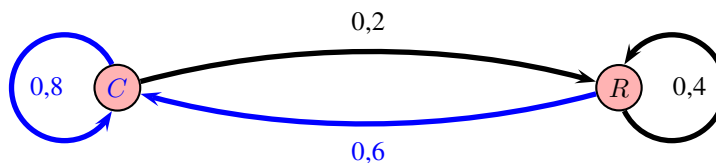
On retrouve bien le résultat de la question **(3.b.)**.

**Exercice 2. Spécialité - Graphe et matrices****5 points****Candidats ayant suivi la spécialité mathématiques**

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1er janvier 2014. On admet que : Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne court pas le lendemain est de 0,2 ; s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne court pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ». Pour tout entier naturel n , on note : c_n la probabilité de l'événement « Hugo court le $(n+1)$ -ième jour » ; r_n la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le $(n+1)$ -ième jour » ; P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$ -ième jour. Le 1er janvier 2014, motivé, le jeune homme court. On a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R .



2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1^{ère} ligne : probabilité d'aller de C vers C , de C vers R ;
- 2^{ème} ligne : probabilité d'aller de R vers C , de R vers R .

On obtient donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$. Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo court le 7e jour ? Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6 .

On a noté c_n la probabilité de l'événement « Hugo court le $(n+1)$ -ième jour », donc la probabilité qu'Hugo court le 7e jour est c_6 . On a alors :

$$\begin{aligned}
 P_6 &= \begin{pmatrix} c_6 & r_6 \end{pmatrix} = P_0 \times M^6 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix} \\
 P_6 &= \begin{pmatrix} c_6 & r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La probabilité qu'Hugo court le 7e jour est donc, arrondie au centième :

$$c_6 \approx 0,75$$



4.

4. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .Pour tout entier n on a :

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

4. b. Montrer que pour tout entier n , $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$.Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n \times M &\iff \begin{pmatrix} c_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} c_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8c_n + 0,6r_n & 0,2c_n + 0,4r_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc pour tout entier n :

$$\begin{cases} c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n \\ c_n + r_n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6(1 - r_n) \\ c_n + r_n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6 \\ c_n + r_n = 1 \end{cases}$$

Donc pour tout entier n ,

$$c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$$

5. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0,75$.5. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.Les suites (c_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = 0,2 \times c_n + 0,6 \end{cases} \quad \left| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 \\ v_n = c_n - 0,75 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= c_{n+1} - 0,75 \\ v_{n+1} &= (0,2c_n + 0,6) - 0,75 \\ v_{n+1} &= 0,2 \times c_n - 0,15 \\ v_{n+1} &= 0,2 \times \left(c_n + \frac{-0,15}{0,2} \right) \\ v_{n+1} &= 0,2 \times (c_n - 0,75) \\ v_{n+1} &= 0,2 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,2$, et de premier terme $v_0 = 0,25$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= c_0 - 0,75 \\ v_0 &= 1 - 0,75 \\ v_0 &= 0,25 \end{aligned}$$

Soit :

$$(v_n) : \begin{cases} v_0 = 0,25 \\ v_{n+1} = 0,2 \times v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

5. b. Exprimer v_n en fonction de n . Déterminer la limite de la suite (v_n) .La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,2$, et de premier terme $v_0 = 0,25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 0,25 \times (0,2)^n$$

Par théorème

**Théorème 3**

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,2 < 1$ et d'après le théorème 3 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,25 \times (0,2)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (v_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

5. c. Justifier que, pour tout entier naturel n , $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = c_n - 0,75$$

On peut en déduire l'expression :

$$c_n = v_n + 0,75$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; c_n = 0,25 \times (0,2)^n + 0,75$$

5. d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?

Lors de la question (5.b.) on a montré que la suite (v_n) tendait vers 0 en $+\infty$. Puisque pour tout entier n on a : $v_n = c_n - 0,75$, on en conclut que la suite (c_n) tend vers 0,75 en $+\infty$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \\ c_n = v_n + 0,75 \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0,75$$

Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre de jours, la probabilité qu'Hugo coure se stabilisera autour de 0,75.

Or le 24 décembre 2014 se situe près de 360 jours après l'état initial du 1er janvier 2014, on peut alors conjecturer que la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 est proche de 0,75.

5. e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe. Comment valider votre conjecture ?**Propriété 2**

Pour trouver l'état stable par le calcul dans un système à deux états possibles, il faut résoudre l'équation

$$P = P \times M \text{ avec } P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \text{ et } 0 \leq x \leq 1.$$

On peut alors conjecturer que l'état stable du graphe est :

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Conjecture que l'on peut valider en calculant le produit matriciel $P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,75 \times 0,8 + 0,25 \times 0,6 & 0,75 \times 0,2 + 0,25 \times 0,4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

On a montré que : $P \times M = P$, la matrice P est bien l'état stable de ce graphe.

**Exercice 3. Probabilités****5 points****Commun à tous les candidats**

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture. On note : R l'événement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » et F l'événement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

Partie A**1. Calculer $P(R)$, la probabilité de l'événement R .**

Le téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire donc on est en condition d'équiprobabilité et :

$$P(R) = \frac{960}{3\,200} = 0,3$$

2. 35% des chansons de la catégorie rock sont en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F .

Cet événement se traduit avec les notations de l'exercice par :

$$P_R(F) = 0,35$$

3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit en français.

La probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français est donnée par :

$$P(R \cap F) = P(R) \times P_R(F) = 0,3 \times 0,35 = \underline{0,105}$$

Soit

$$P(R \cap F) = 0,105$$

4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français. Montrer que $P(F \cap \overline{R}) = 0,28$.

Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français donc $P(F) = 0,385$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(F \cap \overline{R})$$

$$0,385 = 0,105 + P(F \cap \overline{R})$$

Donc

$$P(F \cap \overline{R}) = 0,385 - 0,105 = 0,28$$

5. En déduire $P_{\overline{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

Puisque $P(R) = 0,3$ on a $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 0,7$. On obtient alors aisément :

$$P_{\overline{R}}(F) = \frac{P(F \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0,28}{0,7} = 0,4$$

Ce qui signifie que 40% des chansons qui ne sont pas de la catégorie Rock sont en français.

**Partie B**

Les résultats de cette partie seront arrondis au millièmes. Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

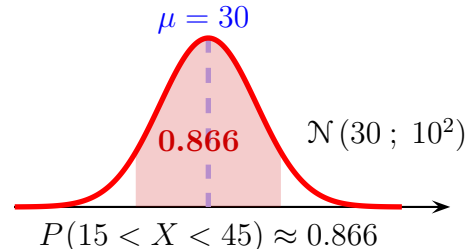
Le propriétaire écoute de la musique.

1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$X \sim N(30 ; 10^2) \Rightarrow P(15 < X < 45) \approx \underline{0,866}$$



Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : $TStat.normFDR(15, 45, 30, 10) \approx 0,866\ 39$
- Sur TI82/83+ : $normalcdf(15, 45, 30, 10)$ ou (fr.) $normalfrép(15, 45, 30, 10)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu $STAT/DIST/NORM/Ncd \Rightarrow NormCD(15, 45, 10, 30)$

2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

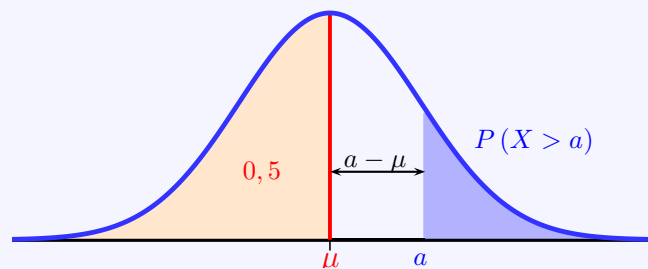
Propriété 3 ($P(X > a)$; $a > \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $N(\mu ; \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$P(X > a) = 0,5 - P(\mu < X < a)$$



La probabilité que cette écoute dure plus d'une heure est $P(X > 60)$ et d'après la propriété 3 :

$$P(X > 60) = 0,5 - P(30 \leq X \leq 60) \approx 0,001\ 3$$

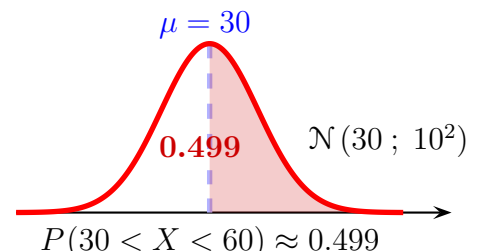
Soit arrondi au millièmes :

$$P(X > 60) \approx \underline{0,001}$$

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$X \sim N(30 ; 10^2) \Rightarrow P(30 < X < 60) \approx \underline{0,499}$$

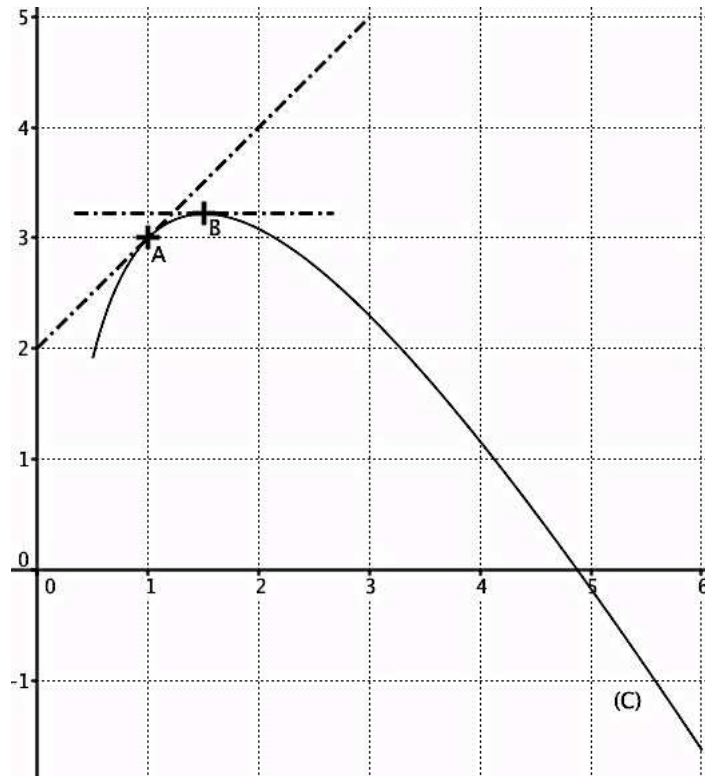


Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : $TStat.normFDR(30, 60, 30, 10) \approx 0,498\ 7$
- Sur TI82/83+ : $normalcdf(30, 60, 30, 10)$ ou (fr.) $normalfrép(30, 60, 30, 10)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu $STAT/DIST/NORM/Ncd \Rightarrow NormCD(30, 60, 10, 30)$

**Exercice 4. Fonctions****6 points****Commun à tous les candidats**

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5 ; 6]$. Les points $A(1 ; 3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C) . Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

**Partie A : Étude graphique****1. Déterminer $f'(1,5)$.**

La tangente au point B d'abscisse 1,5 est horizontale donc de coefficient directeur nul. De ce fait on a :

$$f'(1,5) = 0$$

2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées $(0 ; 2)$. Déterminer en une équation.

Le coefficient directeur a de la tangente à la courbe (C) au point $A(1 ; 3)$ est donc celui de la droite (AC) où $C(0 ; 2)$ donc :

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2 - 3}{0 - 1} = 1$$

L'équation de la tangente est donc de la forme $y = 1x + b$. Puisque $C(0 ; 2)$ appartient à cette droite, on a directement l'ordonnée à l'origine, $b = 2$.

La tangente à la courbe (C) au point $A(1 ; 2)$ est d'équation :

$$(T_1) : y = x + 2$$

3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Sur l'intervalle $[1 ; 2]$ la fonction f est supérieure ou égale à 3 et strictement inférieure à 4.

L'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est donc inférieure à celle du rectangle de côtés 1 et 4 unités, et supérieure à celle du rectangle de côtés 1 et 3 unités.

L'aire est donc comprise entre 3 et 4 unités d'aires.

**4. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[0,5 ; 6]$. Argumenter la réponse.**

On l'a vu dans l'exercice 1.

En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite convexe (respectivement concave) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment $[AB]$ est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Ici, la courbe représentative de la fonction f est au-dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle f est concave sur l'intervalle $[0,5 ; 6]$. De ce fait, d'après la propriété 1, la fonction f est concave sur l'intervalle $[0,5 ; 6]$.

Partie B : Étude analytique

On admet que la fonction f est définie sur $[0,5 ; 6]$ par $f(x) = -2x + 5 + 3 \ln x$.

1. Pour tout réel x de $[0,5 ; 6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{3-2x}{x}$.

La fonction f est dérivable sur $[0,5 ; 6]$ comme somme de fonctions qui le sont et on a aisément :

$$\forall x \in [0,5 ; 6] ; f'(x) = -2 + 3 \times \frac{1}{x} = \frac{-2x + 3}{x}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,5 ; 6] ; f'(x) = \frac{-2x + 3}{x}}$$

2. Étudier le signe de f' sur $[0,5 ; 6]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0,5 ; 6]$.

Sur l'intervalle $[0,5 ; 6]$, le numérateur x de la dérivée f' est strictement positif donc son signe ne dépend que du numérateur $(-2x + 3)$. Soit sur l'intervalle $[0,5 ; 6]$:

$$\forall x \in [0,5 ; 6] ; \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 0 \iff (-2x + 3) = 0 \iff x = \frac{3}{2} \\ f'(x) > 0 \iff (-2x + 3) > 0 \iff 0,5 \leq x < \frac{3}{2} \end{array} \right. \implies f'(x) < 0 \iff \frac{3}{2} < x \leq 6$$

La fonction f est donc croissante sur $[0,5 ; 1,5]$ et décroissante sur $[1,5 ; 6]$.

$$v : \left\{ \begin{array}{ll} [0,5 ; 6] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto v(x) = -2x + 5 + 3 \ln x \end{array} \right.$$

On a :

$$f(0,5) = 4 - 3 \ln 2 \approx 1,921 ; f(1,5) \approx 3,216 \text{ et } f(6) = 3 \ln 6 - 7 \approx -1,625$$

x	0.5	1.5	6
$f'(x)$	+	0	-
f	$f(0.5) \approx 1.921$	$f(1.5) \approx 3.216$	$f(6) \approx -1.625$



3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0,5 ; 6]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

x	0.5	1.5	α	6
$f'(x)$		+	0	
f	$f(0.5) \approx 1.921$	$f(1.5) \approx 3.216$	0	$f(6) \approx -1.625$

Théorème 4 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Remarque : La première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).



Application du corollaire sur $[1.5 ; 6]$:

- La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1.5 ; 6]$;
- L'image par f de l'intervalle $[1.5 ; 6]$ est $[f(6) ; f(1.5)]$ d'après le tableau de variations.
- On a :

$$f(6) \approx -1.625 < 0 < f(1.5) \approx 3.216$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1.5 ; 6]$.

- Valeur approchée.**

Pour avoir un encadrement de α , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

$$\text{Avec un pas de } \Delta = 0.01 \text{ on obtient : } \left\{ \begin{array}{l} f(4,87) \approx 0,009 > 0 \\ f(4,88) \approx -0,005 < 0 \end{array} \right. , \text{ donc } 4,87 < \alpha < 4,88.$$

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 4,88$.

Sur l'intervalle $[0,5 ; 1,5]$

Sur l'intervalle $[0,5 ; 1,5]$, la fonction f est strictement croissante et son minimum est strictement positif $f(0,5) \approx 1,921 > 0$.
l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

Conclusion

La fonction f admet une unique solution α sur l'intervalle $[0,5 ; 6]$. Une valeur approchée de α au centième est alors 4,88.

4. En déduire le tableau de signe de f sur $[0,5 ; 6]$.

A l'aide du tableau de variations de f , on peut conclure que f est positive strictement sur l'intervalle $[0,5 ; \alpha[$, négative strictement sur $]\alpha ; 6]$ et nulle en α .

x	0.5	α	6
signe de $f(x)$	+	0	-



5. On considère la fonction F définie sur $[0,5 ; 6]$ par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x \ln x$.

5. a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0,5 ; 6]$.

La fonction F est dérivable sur $[0,5 ; 6]$ comme somme et composées de fonction qui le sont. F est de la forme $w + uv$ donc de dérivée $w' + u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0,5 ; 6] ; \begin{cases} u(x) = 3x & ; \quad u'(x) = 3 \\ v(x) = \ln x & ; \quad v'(x) = \frac{1}{x} \\ w(x) = -x^2 + 2x & ; \quad w'(x) = -2x + 2 \end{cases}$$

On a donc pour tout réel x de $[0,5 ; 6]$:

$$F(x) = -x^2 + 2x + 3x \ln x$$

Et :

$$F'(x) = w'(x) + u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$F'(x) = -2x + 2 + 3 \ln x + 3x \times \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = -2x + 2 + 3 \ln x + 3$$

$$\boxed{\forall x \in [0,5 ; 6] ; F'(x) = -2x + 5 + 3 \ln x = f(x)}$$

La fonction F est donc une primitive de f sur $[0,5 ; 6]$ puisque l'on vient de montrer que $F' = f$.

5. b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

On a montré lors de la question (B.4.) que la fonction f était positive sur l'intervalle $[0,5 ; \alpha[$ avec $\alpha \approx 4,88$. A fortiori, la fonction f est positive sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

L'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire (u.a.), du domaine compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^2 f(x) \, dx = \left[F(x) \right]_1^2 \\ &= F(2) - F(1) \end{aligned}$$

On a montré lors de la question (B.5.a.) que $F(x) = -x^2 + 2x + 3x \ln x$ soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^2 f(x) \, dx = \underbrace{-2^2 + 4}_0 + 6 \ln 2 - \left(\underbrace{-1^2 + 2}_0 + 3 \ln 1 \right) \\ &= 6 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

On obtient donc la valeur exacte et celle approchée au dixième de l'aire cherchée (toujours exprimée en u.a.) :

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) \, dx = (-1 + 6 \ln 2) \text{ u.a.} \approx \underline{3,2} \text{ u.a.}}$$

Remarque : le résultat est cohérent avec l'encadrement obtenu lors de la question (A.3.).

- Fin du devoir -