



Math93.com

Baccalauréat 2016 - ES/L Polynésie

Série ES/L Obli. et Spé.
10 juin 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter



Remarque : dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroté avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. probabilités

5 points

Commun à tous les candidats

On considère les événements suivants : K : « la demande a été déposée auprès de la banque Karl » ; L : « la demande a été déposée auprès de la banque Lofa » ; M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ; A : « la demande de prêt est acceptée ». Dans tout l'exercice on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

Partie A

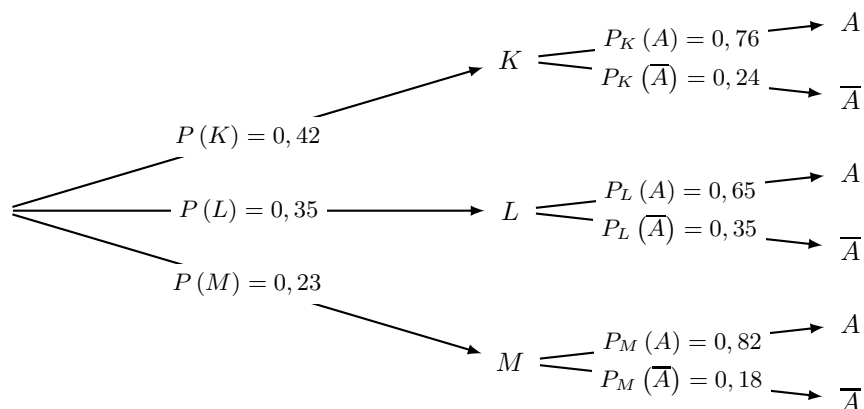
1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

- 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro. Donc

$$P(K) = 0,42 ; P(L) = 0,35 \text{ et } P(M) = 0,23$$

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ; 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ; 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées donc :

$$P_K(A) = 0,76 ; P_L(A) = 0,65 \text{ et } P_M(A) = 0,82$$



2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.

On cherche la probabilité de l'évènement $(K \cap A)$ or :

$$P(K \cap A) = P(K) \times P_K(A) = 0,42 \times 0,76 \approx \underline{0,319}$$

**3. Montrer que $P(A) \approx 0,735$.**

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap K) + P(A \cap L) + P(A \cap M) \\ &= P(A \cap K) + P(L) \times P_L(A) + P(M) \times P_M(A) \\ P(A) &= 0,42 \times 0,76 + 0,35 \times 0,65 + 0,23 \times 0,82 \end{aligned}$$

$$P(A) \approx 0,735$$

4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro sachant que la demande de prêt est acceptée est :

$$P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \times P_M(A)}{P(A)} \approx \frac{0,23 \times 0,82}{0,735}$$

$$P_A(M) \approx 0,257$$

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la durée moyenne d'un prêt immobilier. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prêt immobilier, associe sa durée, en années. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

1. Calculer la probabilité que la durée d'un prêt soit comprise entre 13 et 27 ans.

X est la variable aléatoire qui, à chaque prêt immobilier, associe sa durée, en années.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 7$ soit $X \sim \mathcal{N}(20 ; 7^2)$.

La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}(20 ; 7^2) \implies P(13 < X < 27) \approx \underline{0,683}$$

Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : $TStat.normFDR(13, 27, 20, 7) \approx \underline{0,682689}$
- Sur TI82/83+ : $normalcdf(13, 27, 20, 7)$ ou (fr.) $normalfrép(13, 27, 20, 7)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu $STAT/DIST/NORM/Ncd \Rightarrow NormCD(13, 27, 7, 20)$

2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près du nombre réel a tel que $P(X > a) = 0,1$. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

On a en passant à l'événement contraire :

$$P(X > a) = 0,1 \iff P(X \leq a) = 0,9$$

On cherche a tel que $P(X \leq a) = 0,9$ où X suit une loi normale $\mathcal{N}(20 ; 7^2)$, une loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 7$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-2} près :

$$P(X \leq a) = 0,9 \iff a \approx \underline{28,97}$$

Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : $TStat.invNorm(0,9, 20, 7) \approx \underline{28,970861}$
- Sur TI82/83+ : $invNorm(0,9, 20, 7)$ ou (fr.) $FracNormale(0,9, 20, 7)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : Menu $STAT/DIST/NORM/InvN \Rightarrow InvNormCD(0,9, 7, 20)$

Cela signifie que la probabilité que la durée du prêt immobilier soit supérieure à 28,97 ans est égale à 10%.

**Exercice 2. Suites****7 points****Commun à tous les candidats**

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans 3D qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans 3D vendus	0	5 000	11 000

Le nombre d'écrans 3D vendus par l'entreprise l'année $(2010 + n)$ est modélisé par une suite (u_n) , arithmético-géométrique, de premier terme $u_0 = 0$ et définie par $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

1.**1. a. En supposant que $u_1 = 5\,000$, déterminer la valeur de b .**On a pour tout entier n :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Et donc puisque $u_0 = 0$:

$$u_1 = a \times u_0 + b = 5\,000 \implies \boxed{b = 5\,000}$$

1. b. En supposant de plus que $u_2 = 11\,000$, montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 1,2 \times u_n + 5\,000$.On a pour tout entier n :

$$u_{n+1} = a \times u_n + 5\,000$$

Soit

$$u_2 = a \times u_1 + 5\,000 \iff a = \frac{u_2 - 5\,000}{u_1} = \frac{11\,000 - 5\,000}{5\,000} = 1,2$$

On a pour donc tout entier n :

$$\boxed{u_{n+1} = 1,2 \times u_n + 5\,000}$$

2.**2. a. Calculer u_3 et u_4 .**

$$\begin{cases} u_3 = 1,2 \times u_2 + 5\,000 = \underline{18\,200} \\ u_4 = 1,2 \times u_3 + 5\,000 = \underline{26\,840} \end{cases}$$

2. b. En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu 18 000 et 27 000 écrans. La modélisation semble-t-elle pertinente ?

Les valeurs calculées lors de la question (2.a.) sont proches de celles réellement constatées. La modélisation semble donc pertinente.

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 25\,000$.**3. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2. Préciser la valeur de son premier terme.**Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 1,2 \times u_n + 5\,000 \end{cases} \quad \left| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 &= 25\,000 \\ v_n &= u_n + 25\,000 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 25\,000$$

$$v_{n+1} = (1,2 u_n + 5\,000) + 25\,000$$

$$v_{n+1} = 1,2 \times u_n + 30\,000$$

$$v_{n+1} = 1,2 \times \left(u_n + \frac{30\,000}{1,2} \right)$$

$$v_{n+1} = 1,2 \times (u_n + 25\,000)$$

$$v_{n+1} = 1,2 \times v_n$$



La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,2$, et de premier terme $v_0 = 25\,000$ puisque :

$$v_0 = u_0 + 25\,000$$

$$v_0 = 0 + 25\,000$$

$$v_0 = 25\,000$$

Soit :

$$(v_n) : \begin{cases} v_0 &= 25\,000 \\ v_{n+1} &= 1,2 \times v_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

3. b. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$, et de premier terme $v_0 = 25\,000$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 25\,000 \times (1,2)^n$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n + 25\,000$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n - 25\,000$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 25\,000 \times (1,2)^n - 25\,000$$

4. On souhaite connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes d'écrans 3D dépassera 180 000 unités.

4. a. On souhaite connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes d'écrans 3D dépassera 180 000 unités. Prouver que résoudre l'inéquation $u_n > 180\,000$ revient à résoudre l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

$$u_n > 180\,000 \iff 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000 > 180\,000$$

$$\iff 1,2^n > \frac{25\,000 + 180\,000}{25\,000} = 8,2$$

Donc :

$$u_n > 180\,000 \iff 1,2^n > 8,2$$

4. b. On veut connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes dépassera 180 000. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il détermine et affiche le plus petit entier naturel n , solution de l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

Variables :	N est un entier naturel W est un nombre réel
Initialisation :	N prend la valeur 0 W prend la valeur 1
Traitement :	Tant que $W \leq 8,2$ W prend la valeur $W \times 1,2$ N prend la valeur $N + 1$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N

**4. c. Déterminer cet entier naturel n .**

$$u_n > 180\,000 \iff 1,2^n > 8,2$$

On compose alors par la fonction $\ln$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} u_n > 180\,000 &\iff \ln 1,2^n > \ln 8,2 \\ &\iff n \ln 1,2 > \ln 8,2 \end{aligned}$$

On divise alors les deux membres par $\ln 1,2 > 1$:

$$\iff n > \frac{\ln 8,2}{\ln 1,2} \approx 11,54$$

Puisque n est entier, les solutions de l'inéquation sont les entiers supérieurs ou égaux à 12. L'algorithme affichera donc la valeur 12.

4. d. À partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre de ses ventes d'écrans 3D. Combien d'écrans 3D peut-elle prévoir de vendre en 2025 ?

- En 2022, l'entreprise aura vendu un nombre d'écrans de :

$$u_{12} = 25\,000 \times 1,2^{12} - 25\,000 \approx 197\,903$$

- À partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an. Il y a donc après 3 ans de baisse :

$$u_{12} \times (1 - 0,15)^3 \approx \underline{121\,537}$$

Elle peut donc prévoir vendre environ 121 537 écrans en 2025.

**Exercice 3. Obligatoire****5 points**

Candidats de L ou de Es n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln x - x + 1$.**Affirmation 1 (A : Fausse)**La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.**Preuve.**

- **Méthode 1 : avec un contre-exemple.**

Par définition, si f est croissante sur l'intervalle $]0; 1[$, pour tout a et b de $]0; 1[$:

$$0 < a < b < 1 \implies f(a) < f(b)$$

Or par exemple pour $a = 0,1$ et $b = 0,2$:

$$f(a) = f(0,1) \approx 0,67 > f(b) = f(0,2) \approx 0,48$$

La fonction f n'est donc pas croissante sur l'intervalle $]0; 1[$ et l'affirmation A est fausse.

- **Méthode 2 : avec la dérivée.**

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 1[$ et :

$$\forall x \in]0; 1[; f'(x) = x' \ln x + x (\ln x)' + (-x + 1)'$$

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x) = \ln x + 1 - 1$$

$$\boxed{\forall x \in]0; 1[; f'(x) = \ln x}$$

Or sur l'intervalle $]0; 1[$, la fonction $\ln$ est négative, donc la dérivée de f est négative et f est décroissante. L'affirmation A est fausse.**Affirmation 2 (B : Vraie)**La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0; +\infty[$.**Preuve.**En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :**Proposition 1 (Fonction convexe/concave)**Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. f est **convexe** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles. f est **concave** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles.



La fonction f est deux fois dérivable et on a pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

$$\forall x \in]0 ; +\infty[; \begin{cases} f'(x) = \ln x \\ f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la dérivée seconde est strictement positive et donc, d'après la proposition 2, la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$. L'affirmation B est donc vraie.

Affirmation 3 (C : Fausse)

Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) \leq 50$.

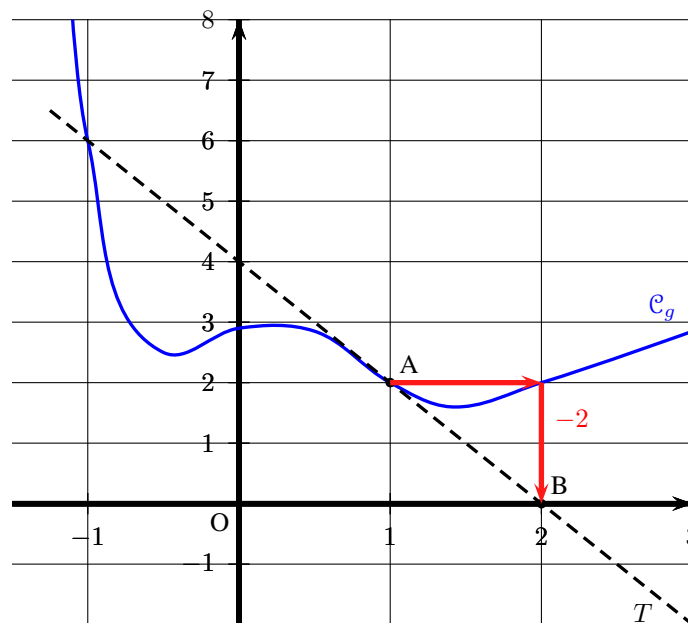
Preuve.

On a par exemple

$$f(60) \approx 186,66 > 50$$

L'affirmation C est donc fausse.

2. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g . On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



Affirmation 4 (D : Vraie)

$$g'(1) = -2.$$

Preuve.

Le nombre $g'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette droite coupe l'axe des abscisse en 2.

La droite T passe donc par les points $A(1, 2)$ et $B(2, 0)$ et son coefficient directeur est :

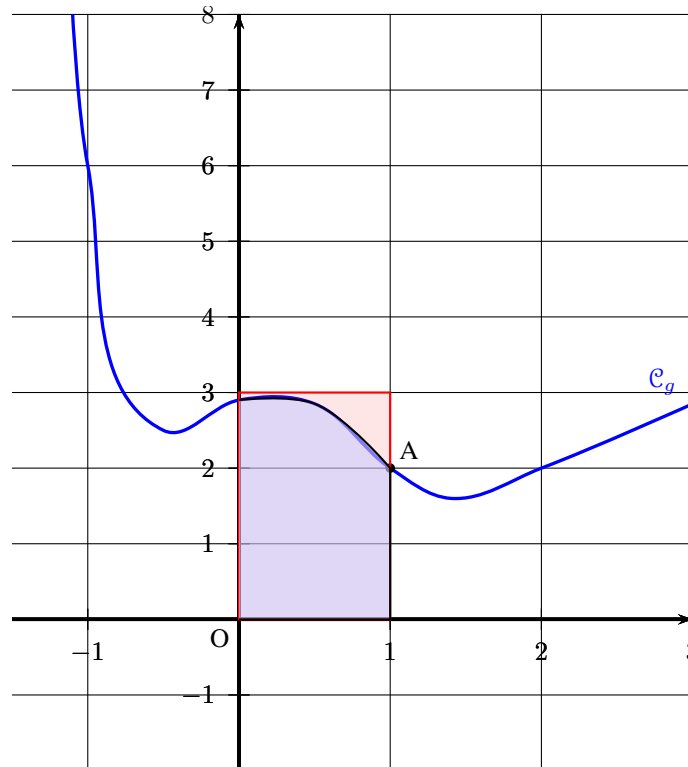
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2}{2 - 1} = -2 = g'(1)$$

L'affirmation D est donc vraie.

**Affirmation 5 (E : Vraie)**

$$\int_0^1 g(x) \, dx < 3.$$

Preuve.



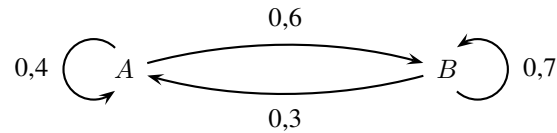
On remarque que la fonction g est positive sur l'intervalle $[0; 1]$. En unités d'aire, l'intégrale $\int_0^1 g(x) \, dx$ est donc égale à l'aire du domaine compris entre la courbe C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Or ce domaine (en bleu) est strictement inclus dans un rectangle (en rouge) de dimension 1×3 . De ce fait :

$$0 < \int_0^1 g(x) \, dx < 3$$

L'affirmation E est donc vraie.

**Exercice 3. Spécialité****5 points****Candidats de ES ayant suivi la spécialité mathématiques**

1. On donne le graphe probabiliste suivant :

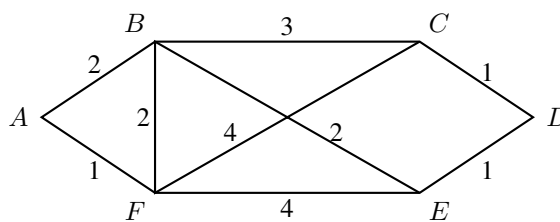
**Affirmation 1 (A : Fausse)**L'état stable associé à ce graphe est $\left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$.**Preuve.**

La matrice de transition associée à ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right) M &= \left(0,4 \times \frac{2}{3} + 0,3 \times \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \times 0,6 + \frac{1}{3} \times 0,7\right) \\ &= \left(\frac{11}{30} \quad \frac{19}{30}\right) \\ \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right) M &\neq \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Donc l'état stable associé à ce graphe n'est pas $\left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$. L'affirmation A est fausse.2. On donne le graphe pondéré G suivant :**Affirmation 2 (B : Vraie)**

Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

Preuve.**Définition 1 (Chaîne eulérienne)**

Une chaîne eulérienne est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes :

- elle contient toutes les arêtes du graphe ;
- chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.



Citons le théorème d'Euler

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

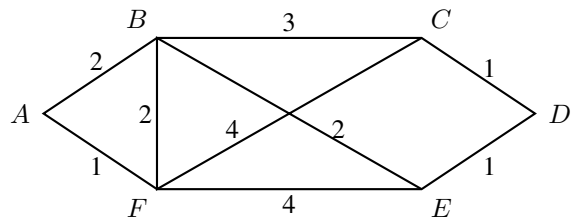
- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse [Leonhard d'Euler](#) (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.



Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	4	3	2	3	4



Donc deux sommets sont de degré impair, les sommets C et E. Par conséquent, d'après le théorème 1, ce graphe connexe admet une chaîne eulérienne.

Il existe donc une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe. L'affirmation B est vraie.

Affirmation 3 (C : Vraie)

La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

Preuve.

Pour cela appliquons l'algorithme de Dijkstra.

Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de .. à	à B	à C	à D	à E	à F
A	2(A)				1(A)
F(1A)	2(A)	4(F)		4(F)	-
B(2A)	-	3(B)		2(B)	-
E(2B)	-	3(B)	1(E)	-	-
D(1E)	-	1(D)	-	-	-

Le chemin le plus court pour relier A et D est :

$$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D$$

La plus courte chaîne entre les sommets A et D est donc une chaîne de poids 5. L'affirmation 3 est vraie.



3. On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

Affirmation 4 (D : Fausse)

Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D .

Preuve.

Définition 2 (Matrice d'adjacence d'un graphe)

Considérons un graphe G (orienté), d'ordre n . On numérote les sommets de G de 1 à n . On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (orientées) allant du sommet i vers le sommet j .

Propriété 1 (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)

Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un entier naturel. Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j .

On va donc déterminer la matrice M^4 . Le terme $M_{2,4}^4$ nous donnera le nombre de chaînes de longueur 4 reliant B à D .

$$M^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Or on remarque que :

$$M_{(2,4)}^4 = 6 \neq 3$$

Donc il existe exactement 6 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D , l'affirmation 4 est fausse.

Affirmation 5 (E : Vraie)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Il existe un réel a pour lequel B est l'inverse de A .

Preuve.

La matrice B est l'inverse de la matrice A si et seulement si $AB = Id = BA$. On a prouvé en cours que une seule égalité suffit de ce fait :

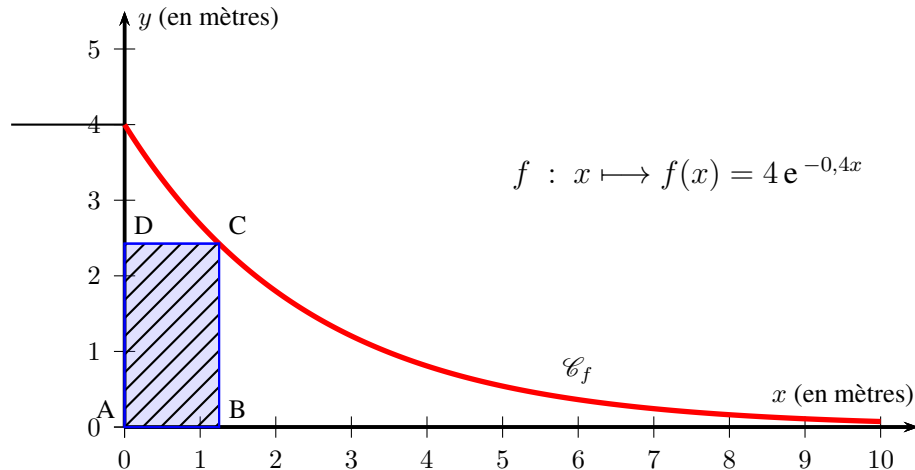
$$AB = Id \iff \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = -1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \iff a = -1$$

Il existe un réel $a = -1$ pour lequel B est l'inverse de A . L'affirmation E est vraie.

**Exercice 4. Aire et fonction (EPI)****3 points****Commun à tous les candidats**

(rdlr : Cet exercice est un EPI, un exercice à prise d'initiative.)

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $f(x) = 4e^{-0,4x}$. Cette courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathcal{C}_f$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$. Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3,6 \text{ m}^2$.

Le panneau publicitaire est représenté par le rectangle ABCD de dimensions :

$$AB = x_B = 2 \quad \text{et} \quad BC = y_C = f(x_B) = f(2) = 4e^{-0,8}$$

Son aire est donc :

$$\mathcal{A}(2) = AB \times BC = 2 \times 4e^{-0,8} \approx \underline{3,6 \text{ m}^2}$$

2. Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ? On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.

- Aire en fonction de x .**

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$, l'aire du rectangle ABCD de dimensions $AB = x$ et $BC = f(x)$ est :

$$\mathcal{A}(x) = AB \times BC = x \times f(x) = 4xe^{-0,4x}$$

- Position du problème.**

On cherche les dimensions qui rendent l'aire $\mathcal{A}(x)$ maximale, pour cela nous allons étudier les variations de la fonction $\mathcal{A}$ et déterminer son maximum sur l'intervalle d'étude.

- Dérivée et variations.**

$$\mathcal{A} : \begin{cases} [0; 10] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \mathcal{A}(x) = 4x \times e^{-0,4x} \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0; 10]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction $\mathcal{A}$ est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0; 10] ; \mathcal{A}(x) = u(x) \times v(x) : \begin{cases} u(x) = 4x & ; \quad u'(x) = 4 \\ v(x) = e^{-0,4x} & ; \quad v'(x) = (-0,4 \times e^{-0,4x}) \end{cases}$$



On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; 10], \mathcal{A}'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ \mathcal{A}'(x) &= 4 \times e^{-0,4x} + 4x \times (-0,4 \times e^{-0,4x}) \\ \mathcal{A}'(x) &= (1 - 0,4x) \times 4 e^{-0,4x}\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0; 10] ; \mathcal{A}'(x) = (1 - 0,4x) \times 4 e^{-0,4x}}$$

Le facteur $(4 e^{-0,4x})$ étant strictement positif sur $[0; 10]$, la dérivée $\mathcal{A}'$ est du signe de $(1 - 0,4x)$ soit :

$$\forall x \in [0; 10] ; \begin{cases} \mathcal{A}'(x) = 0 \iff 1 - 0,4x = 0 \iff x = 2,5 \\ \mathcal{A}'(x) > 0 \iff 1 - 0,4x > 0 \iff 0 \leq x < 2,5 \\ \mathcal{A}'(x) < 0 \iff 1 - 0,4x < 0 \iff 2,5 < x \leq 10 \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{A}$ est donc croissante sur $[0; 2,5]$ et décroissante sur $[2,5; 10]$. Elle atteint donc son maximum en $x_m = 2,5$ et ce maximum est :

$$\mathcal{A}(2,5) = 10 e^{-1} \approx 3,68$$

$$\mathcal{A} : \begin{cases} [0; 10] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathcal{A}(x) = 4x \times e^{-0,4x} \end{cases}$$

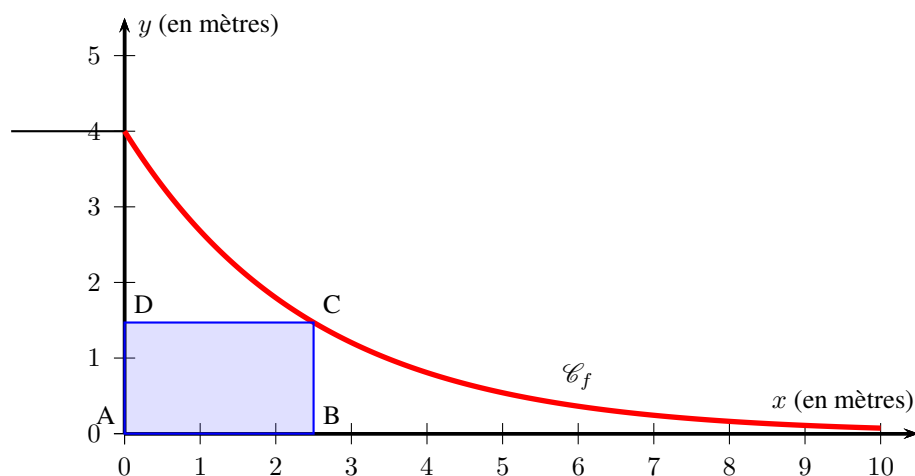
x	0	2,5	10
$\mathcal{A}'(x)$		+	-
$\mathcal{A}$	0	$f(2,5) \approx 3,68$	$f(10) \approx 0,73$

• **Conclusion.**

Les dimensions du panneau publicitaire dont l'aire est la plus grande possible sont donc, arrondies au centimètre près :

$$\boxed{AB = x_m = 2,5 \text{ m}} \quad \text{et} \quad \boxed{BC = f(x_m) = f(2,5) = 4 e^{-1} \approx 1,47 \text{ m}}$$

Cette aire est d'alors environ 3,68 m².



- Fin du devoir -