Baccalauréat 2017 - ES/L Pondichéry

Math93.com

Série ES/L Obli. et Spé.
26 Avril 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

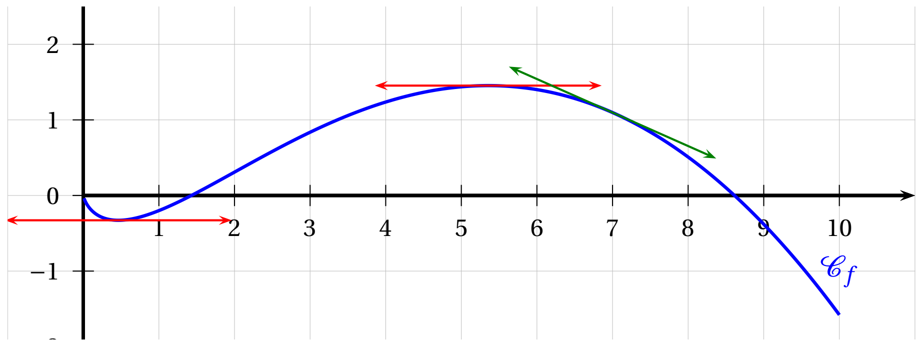
/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Question 1 (Réponse b)

Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 | $\boxed{\textbf{b. } 2}$ | **c.** 3

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Les solutions sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ sont donc les abscisses des points de la courbe qui admettent une tangente horizontale. Ils sont au nombre de 2 car la courbe semble posséder deux tangentes horizontales sur cet intervalle (en rouge).

Question 2 (Réponse c)

Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul | **b.** strictement positif | $\boxed{\textbf{c. } \text{strictement négatif}}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Le nombre $f'(7)$ est donc négatif car la tangente à la courbe au point d'abscisse 7 semble être de coefficient directeur strictement négatif (en vert).

Question 3 (Réponse c)

La fonction f' est :

a. croissante sur $]0\,;\,10]$ **b.** croissante sur $[4\,;\,7]$ $\boxed{\textbf{c.}\ \text{décroissante sur } [4\,;\,7]}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Sur l'intervalle $[4\,;\,7]$, le coefficient directeur des tangentes à la courbe ont des coefficients directeurs de plus en plus petit, donc la fonction f' est bien décroissante sur cet intervalle.

Question 4 (Réponse c)

On admet que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,10]$ on a : $f'(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + 1$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet sur cet intervalle un point d'inflexion :

a. d'abscisse 2,1 **b.** d'abscisse 0,9 $\boxed{\textbf{c.}\ \text{d'abscisse } 2}$

Preuve.
La fonction f' est définie et dérivable sur $]0;\,10]$. Pour tout réel x de cet intervalle on obtient facilement :

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

Or on sait que si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a. Or on a :

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet sur $]0;\,10]$ un point d'inflexion d'abscisse $a = 2$.

Exercice 2. Probabilités 5 points

Commun à tous les candidats

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied. Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} *près.*

Partie A

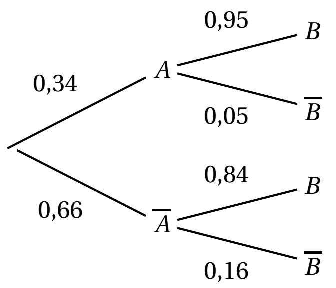
Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :

- *34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes ; parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ; parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.*

On sélectionne au hasard un coureur et on considère les évènements suivants :

- *A : « le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes » ; B : « le coureur a moins de 60 ans ».*

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2.

2. a. Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)\times P_A\left(\overline{B}\right)=0,34\times 0,05=\underline{0,017}$$

La probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans est donc $0,017$.

2. b. Vérifier que $P\left(\overline{B}\right)\approx 0,123$.

Les évènements A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{B}\right)&=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\\
P\left(\overline{B}\right)&=P(A)\times P_A\left(\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)\\
P\left(\overline{B}\right)&=0,34\times 0,05+0,66\times 0,16\\
P\left(\overline{B}\right)&=0,017+0,1056\\
P\left(\overline{B}\right)&=0,1226
\end{aligned}$$

On a bien vérifié que $P\left(\overline{B}\right)\approx\underline{0,123}$.

2. c. Calculer $P_{\overline{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

$$P_{\overline{B}}(A)=\frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P\left(\overline{B}\right)}\approx\frac{0,017}{0,123}\approx\underline{0,138}$$

Cela signifie donc que la probabilité qu'un coureur termine la course en moins de 234 minutes sachant qu'il a plus de 60 ans est d'environ $\underline{0,138}$.

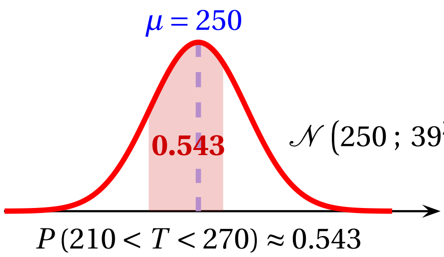
Partie B

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 39$.

1. Calculer $P(210 \leqslant T \leqslant 270)$.

La variable aléatoire T suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 39$.
La calculatrice nous donne alors arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{T \sim \mathcal{N}\left(250\,;\,39^2\right) \Longrightarrow P\left(210 < T < 270\right) \approx \underline{0{,}543}}$$



Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(210\ ,\ 270\ ,\ 250\ ,\ 39) \approx \underline{0{,}543\,431}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(210\ ,\ 270\ ,\ 250\ ,\ 39)$ *ou (fr.) normalfrép*$(210\ ,\ 270\ ,\ 250\ ,\ 39)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(210\ ,\ 270,\ 39\ ,\ 250\ )$

2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon. Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.
On cherche $P_{(210 \leq T \leq 270)}\left(T \leq 240\right)$ soit :

$$P_{(210 \leq T \leq 270)}\left(T \leq 240\right) = \frac{P(210 \leq T \leq 240)}{P(210 \leq T \leq 270)} \approx \frac{0{,}246287}{0{,}543} \approx \underline{0{,}453}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(210\ ,\ 240\ ,\ 250\ ,\ 39) \approx \underline{0{,}543\,43}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(210\ ,\ 240\ ,\ 250\ ,\ 39)$ *ou (fr.) normalfrép*$(210\ ,\ 240\ ,\ 250\ ,\ 39)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(210\ ,\ 240,\ 39\ ,\ 250\ )$

3.

3. a. Calculer $P(T \leqslant 300)$.

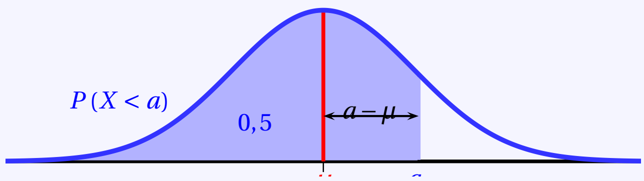
Propriété 1 $\left(P\left(X < a\right)\ ;\ a > \mu\right)$

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors on a :

$$P\left(X < \mu\right) = 0{,}5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P\left(X < a\right) = 0{,}5 + P\left(\mu < X < a\right)}$$



Donc on a :

$$P(T \leq 300) = 0{,}5 + P(250 \leq T \leq 300) \approx \underline{0{,}9}$$

3. b. Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant $P(T \geqslant t) = 0{,}9$.
On a de façon évidente : $P(T \geq t) = 0{,}9 \Longleftrightarrow P(T \leq t) = 0{,}1$.
On cherche t tel que $P\left(T \leq t\right) = 0{,}1$ où T qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(250\,;\,39^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-0} près :

$$\boxed{P\left(T \leq t\right) = 0{,}1 \Longleftrightarrow t \approx \underline{200}}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.1\ ,\ 250\ ,\ 39) \approx \underline{200{,}019\,448\,9}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.1\ ,\ 250\ ,\ 39)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.1\ ,\ 250\ ,\ 39)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.1\ ,\ 39\ ,\ 250)$

3. c. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.
Cela signifie donc que 90% des marathonien ont couru le marathon en plus de 200 minutes.

Exercice 3. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité, candidats L

Soit la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 150$ *et pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 45$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = 0,8 \times 150 + 45 = \underline{165} \quad \text{et} \quad u_2 = 0,8 \times 165 + 45 = \underline{177}$$

2. Voici deux propositions d'algorithmes :

Variables :
N est un entier naturel
U est un nombre réel
Initialisation :
U prend la valeur 150
N prend la valeur 0
Traitement :
Tant que $U \geqslant 220$
U prend la valeur $0,8 \times U + 45$
N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie :
Afficher N

Algorithme 1

Variables :
N est un entier naturel
U est un nombre réel
Initialisation :
U prend la valeur 150
N prend la valeur 0
Traitement :
Tant que $U < 220$
U prend la valeur $0,8 \times U + 45$
N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie :
Afficher N

Algorithme 2

2. a. Un seul de ces algorithmes permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$. Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

La condition de la structure itérative du premier algorithme : « Tant que $U \geq 220$ » ne sera pas vérifiée dès le premier terme, la sortie sera donc immédiate. Le bon algorithme est donc le deuxième.

2. b. Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme choisi à la question précédente ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	150.000	165.000	177.000	186.600	194.280	200.424	205.339	209.271	212.417	214.934

n	10	11	12	**13**	14
u_n	216.947	218.558	219.846	**220.877**	221.701

On utilise la fonction TABLE de la calculatrice, on obtient alors la valeur $\underline{N = 13}$, c'est le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$.

3. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 150 \\ u_{n+1} & = 0,8 \times u_n + 45 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 225 \end{cases}$$

©ISSN 2272-5318

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 225\\
v_{n+1} &= (0{,}8\ u_n + 45) - 225\\
v_{n+1} &= 0{,}8 \times u_n - 180\\
v_{n+1} &= 0{,}8 \times \left(u_n + \frac{-180}{0{,}8}\right)\\
v_{n+1} &= 0{,}8 \times (u_n - 225)\\
v_{n+1} &= 0{,}8 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $v_0 = -75$ puisque :

$$\begin{aligned}
v_0 &= u_0 - 225\\
v_0 &= 150 - 225\\
v_0 &= -75
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -75 \\ v_{n+1} & = 0{,}8 \times v_n \end{cases} \ ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 225 - 75 \times 0{,}8^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $v_0 = -75$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ v_n = -75 \times (0{,}8)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 225$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 225$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n = -75 \times (0{,}8)^n + 225}$$

4. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150. On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre : 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ; 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.
La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250. Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ? Justifier la réponse.

- Notons w_n le nombre de participants à cette course en $2015 + n$. On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre : 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante donc 80% reviennent et 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course. On a donc pour tout entier n :

$$\begin{cases} w_0 = 150 \\ w_{n+1} = 0{,}8 \times w_n + 45 \end{cases}$$

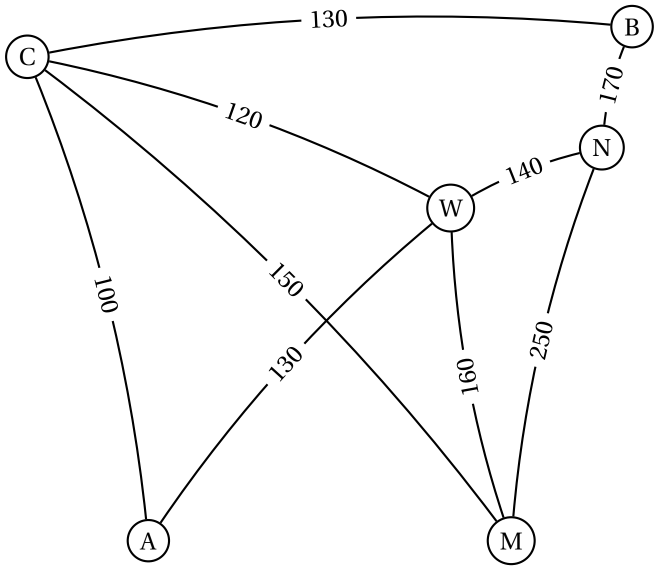
  On retrouve alors la suite (u_n).
- On cherche donc à résoudre l'inéquation : $u_n \geq 250$ soit

$$\begin{aligned}
u_n \geq 250 &\Longleftrightarrow 225 - 75 \times 0{,}8^n \geq 250\\
&\Longleftrightarrow -75 \times 0{,}8^n \geq 25\\
&\Longleftrightarrow 0{,}8^n \leq -\frac{25}{75} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

  Cette inéquation n'a clairement aucune solution puisque pour tout entier n, $0{,}8^n > 0$.
- Conclusion : ils n'auront pas à refuser des inscriptions dans les années à venir car le nombre de participants ne dépassera pas 250.

Spécialité : Graphes — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion.

1.

1. a. Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

- Graphe Connexe

> **Définition 1** (Graphe connexe)
>
> Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne contenant tous les sommets du graphe, la chaîne : $A-C-B-N-W-M$ donc le graphe est connexe.

- Application du Théorème.
Une chaîne eulérienne est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes : elle contient toutes les arêtes du graphe et chaque arête n'est décrite qu'une seule fois. De ce fait on cherche ici l'existence d'une telle chaîne.

> **Théorème 1** (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)
>
> – Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
> – Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).
>
> 
>
> **Remarque** : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse* *Leonhard d'Euler* (1707-1783) *fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	M	N	W
Degré	2	2	4	3	3	4

Donc deux sommets sont de degré impair , les sommets M et N. Par conséquent, d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne.
Il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois .

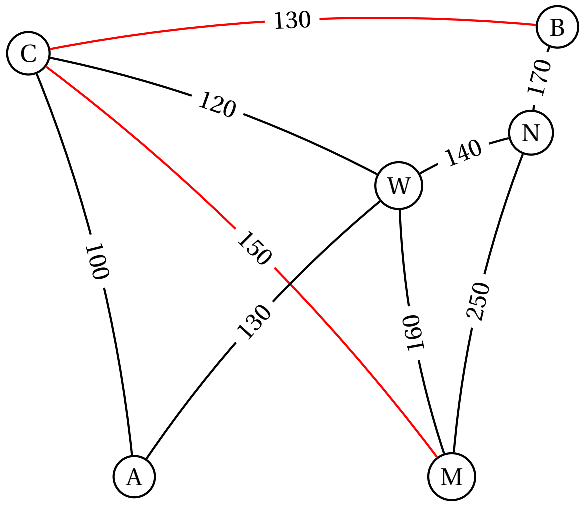
1. b. Donner un exemple d'un tel trajet.

Un tel trajet est : $M - C - A - W - N - B - C - W - M - N$.

2. Alexis veut relier Boston à Miami. En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le moins cher ainsi que son coût .

Pour déterminer le trajet le moins cher pour aller de B à M, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.



de ... à	A	C	M	N	W
B	∞	**130B**	∞	170B	∞
$C(130B)$	230C		280C	**170B**	250C
$N(170B)$	**230C**		280C		250C
$A(230C)$			280C		**250C**
$W(250C)$			**280C**		

Le chemin le moins cher pour relier B (Boston) à M (Miami) est donc de 280 dollars :

$$\boxed{B \xrightarrow{130} C \xrightarrow{150} M}$$

3.

3. a. Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

Définition 2 (Matrice d'adjacence d'un graphe)

Considérons un graphe G (orienté), d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (orientées) allant du sommet i vers le sommet j.

On obtient donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. b. Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes. Combien y a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

Propriété 2 (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)

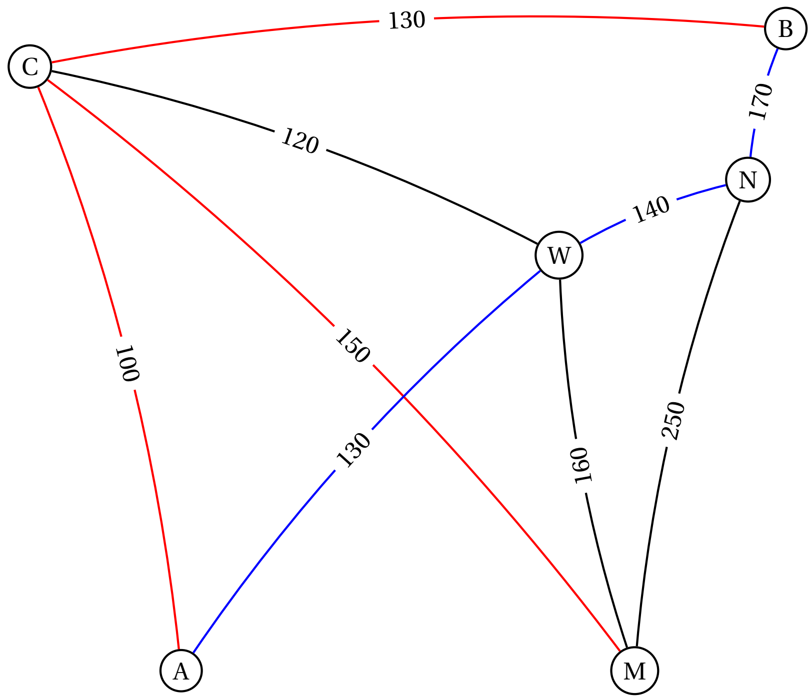
Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un entier naturel. Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

On calcule donc les puissances 2 et 3 de la matrice d'adjacence :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{2} & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

- Le coefficient (1 ; 2) de la matrice M^2 vaut 1 donc il y a donc 1 trajet pour aller d'Atlanta à Boston en deux liaisons.
- Le coefficient (1 ; 2) de la matrice M^3 vaut 2 donc il y a donc 2 trajets pour aller d'Atlanta à Boston en trois liaisons.
- Conclusion : 3 trajets permettent de relier Atlanta à Boston en trois liaison aériennes maximum :

$$A-C-B \text{ et } A-W-N-B \text{ et } A-W-C-B$$



Exercice 4. Fonctions — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe. Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur [0 ; 7].

1. **Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle [0 ; 7].**

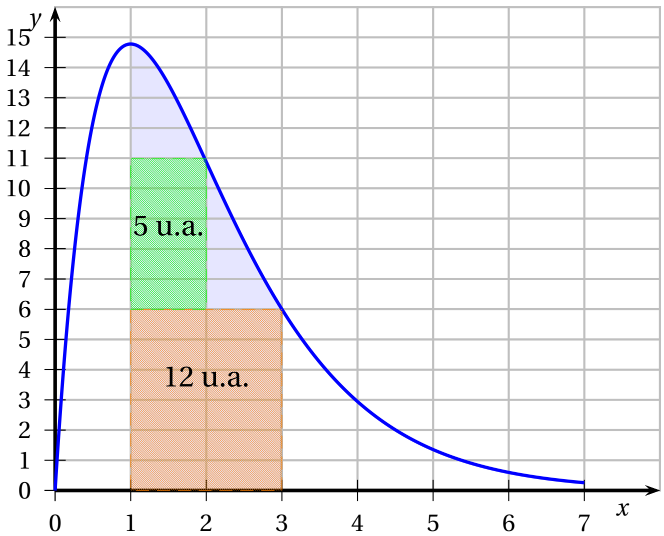
$$f(x) = 10 \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < x_1 < 1 \\ 2 < x_2 < 3 \end{cases}$$

2. **Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 7] et préciser la valeur en laquelle il est atteint.**
Le maximum de la fonction f vaut environ 14,8 et il semble atteint pour $x = 1$.

3. **La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?**

a. [9 ; 17] $\qquad$ $\boxed{\textbf{b. } [18 ; 26]}$ $\qquad$ **c.** [27 ; 35]

La fonction est définie et dérivable (donc continue) sur son intervalle de définition, elle y est donc intégrable. Y étant en outre positive, l'intégrale correspond donc à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
On voit alors que la valeur de l'intégrale appartient à l'intervalle [16 ; 26], et seule la réponse b convient.



Partie B

La fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 7] d'expression : $f(x) = 2xe^{-x+3}$.

1. **Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 7], $f'(x) = (-2x + 2)\mathrm{e}^{-x+3}$.**

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;\,7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x+3} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur [0 ; 7].
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,7]\,;\ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \ \begin{cases} u(x) = 2x & ; \quad u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x+3} & ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0\,;\,7],\ \ f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x+3} + 2x \times \left(-\mathrm{e}^{-x+3}\right)$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,7]\,;\ f'(x) = (-2x + 2)\mathrm{e}^{-x+3}}$$

 ©ISSN 2272-5318

2.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f.

$$\forall x \in [0\,;\,7]\,;\; f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et a fortiori sur $[0\,;\,7]$ donc f' est du signe du facteur $(-2x+2)$.

$$\begin{cases} -2x+2=0 \iff x=1 \\ -2x+2<0 \iff x>1 \end{cases}$$

Donc on obtient pour $f\,:\,x \longmapsto f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3}$:

x	0	α	1	β	7
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	10	$2\mathrm{e}^2 \approx 14.8$	10	$14\mathrm{e}^{-4} \approx 0.26$

2. b. Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$.
Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$ est $2\mathrm{e}^2$, il est atteint pour $x=1$.

3.

3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0;7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $[0;1]$** :
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0;1]$;
  - Le réel $k=10$ est compris entre $f(0)=0$ et $f(1)=2\mathrm{e}^2 \approx 14{,}8$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;1]$.
- **Application du corollaire sur $[1;7]$** :
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1;7]$;
  - Le réel $k=10$ est compris entre $f(7) \approx 0{,}26$ et $f(1)=2\mathrm{e}^2 \approx 14{,}8$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[1;7]$.

3. b. On admet que $\alpha \approx 0{,}36$ à 10^{-2} près. Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.
Pour avoir un encadrement de β, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(2{,}16) & \approx & 10{,}007 > 10 \\ f(2{,}17) & \approx & 9{,}95 < 10 \end{array}\right|,\ \text{donc } 2{,}16 < \beta < 2{,}17.$$

Une valeur approchée de β à 0.01 près est donc $\underline{\beta \approx 2{,}16}$.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;7]$ par : $F(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x+3}$.

4. a. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0;7]$.

$$F : \begin{cases} [0\,;\,7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = (-2x-2)\times \mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

La fonction F est dérivable sur $[0\,;\,7]$.
La fonction F est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,7]\,;\; F(x) = u(x)\times v(x) \;:\; \begin{cases} u(x) = (-2x-2) & ; \quad u'(x) = -2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x+3} & ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,7],\; F'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ F'(x) &= -2\times \mathrm{e}^{-x+3} + (-2x-2)\times\left(-\mathrm{e}^{-x+3}\right) \\ F'(x) &= (-2+2x+2)\,\mathrm{e}^{-x+3} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,7]\,;\; F'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3} = f(x)}$$

Donc F est une primitive de f sur l'intervalle $[0;7]$.

4. b. Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x=1$, $x=3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.

La fonction f est positive (et continue) sur $[1;3]$ donc l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x=1$, $x=3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3)-F(1) \\ &= (-6-2)\mathrm{e}^{-3+3} - (-2-2)\mathrm{e}^{-1+3} \\ &= -8\mathrm{e}^0 + 4\mathrm{e}^2 \\ \mathscr{A} &= \underline{\left(4\,\mathrm{e}^2-8\right)\ \text{u.a.}} \end{aligned}$$

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

5. a. Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.

La valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 1 centaine et 3 centaines d'objets est (en milliers d'euros) :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-1}\times\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\times\left(4\,\mathrm{e}^2-8\right) \\ m &\approx \underline{10{,}778} \end{aligned}$$

Donc la valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets est de <u>10 778 euros</u> (arrondi à l'euro).

5. b. L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros. Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

On cherche donc à résoudre l'inéquation $f(x) > 10$. D'après la question **(3.a.)** et les variations de f on a :

$$f(x) > 10 \iff x \in \left]\alpha\,;\beta\right[\;\text{ avec }\; \begin{cases} \alpha \approx 0{,}36 \;\text{ et }\; f(0{,}36) \approx 10{,}09 > 10 \\ \beta \approx 2{,}16 \;\text{ et }\; f(2{,}16) \approx 10{,}007 > 10 \end{cases}$$

L'entreprise doit donc vendre entre 0,36 centaine et 2,16 centaines soit <u>entre 36 et 216 objets</u> pour que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.

Fin du devoir