



Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Métropole

Série S Obli. et Spé.
21 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter



Remarque : dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroté avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Fonctions

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(x) = x e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

$$\bullet \quad (1) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \left| \quad \bullet \quad (2) : \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \left| \quad \bullet \quad (3) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right.$$

Pour tout réel x de $[0; +\infty[$ on a

$$h(x) = x e^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$

Donc d'après la relation (1) de la propriété 1 on a par composition des limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0}$$

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

$$f : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = x \times e^{-x} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0; +\infty[; f(x) = u(x) \times v(x) : \begin{cases} u(x) = x & ; \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & ; \quad v'(x) = (-e^{-x}) \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0; +\infty[; f'(x) = (1 - x) e^{-x}}$$



La fonction dérivée h' s'exprime comme produit de deux facteurs. Le facteur e^{-x} est strictement positif sur $[0; +\infty[$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De ce fait, h' est du signe du facteur $(1-x)$ dont l'étude du signe est aisée.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0; +\infty[: \begin{cases} 1-x=0 \iff x=1 \\ 1-x<0 \iff x>1 \end{cases} \implies 1-x>0 \iff x<1$$

Donc on a :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de h	$ \begin{array}{ccc} & \nearrow & \searrow \\ 0 & & e^{-1} \approx 0.368 \\ & \nwarrow & \swarrow \\ & 0 & 0 \end{array} $		

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h .

3. a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $h(x) = e^{-x} - h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h .

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 e^{-x} - h'(x) &= e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\
 &= e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} \\
 &= xe^{-x} \\
 e^{-x} - h'(x) &= \underline{h(x)}
 \end{aligned}$$

3. b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$.

Une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$ est par exemple la fonction

$$x \rightarrow -e^{-x}$$

3. c. Dédurre des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle

La primitive d'une différence est la différence des primitive donc une primitive de h' étant h , une primitive de

$$x \rightarrow e^{-x} - h'(x)$$

est

$$x \rightarrow -e^{-x} - h(x) = -e^{-x} - xe^{-x} = (-1-x)e^{-x}$$

Une primitive de h est donc par exemple la fonction H définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = \underline{(-1-x)e^{-x}}$$

**Partie B**

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1)$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé. Ces deux courbes sont tracées en annexe page 8. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

On est dans un repère orthonormé, donc la distance MN est donnée par :

$$\begin{aligned} MN^2 &= (g(x) - f(x))^2 \\ &= \left(\ln(x+1) - (xe^{-x} + \ln(x+1)) \right)^2 \\ &= (\ln(x+1) - xe^{-x} - \ln(x+1))^2 \\ &= (-xe^{-x})^2 \\ &= (xe^{-x})^2 \\ MN^2 &= (h(x))^2 \end{aligned}$$

Or on a vu lors de la question (2.) de la partie A que la fonction h était positive (ou nulle) sur $[0; +\infty[$. En effet les variations de h prouvent que son minimum sur $[0; +\infty[$ est 0, atteint pour $x = 0$. On a donc :

$$MN^2 = (h(x))^2 \iff MN = h(x)$$

Toujours d'après la question (A.2.), on sait que le maximum de h sur $[0; +\infty[$ est atteint pour $x = 1$ et que ce maximum est :

$$h(1) = e^{-1} \approx 0,368$$

1. b. Placer sur le graphique fourni en annexe page 8 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN .

Les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN sont d'abscisse 1 or on a :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \times e^{-1} + \ln(1+1) = e^{-1} + \ln 2 \approx 1,061 \\ g(1) = \ln 2 \approx 0,693 \end{cases}$$

donc on a :

$$M(1; f(1)) = M(1; e^{-1} + \ln 2) \quad \text{et} \quad N(1; \ln 2)$$

2. Soit un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

2. a. Hachurer le domaine correspondant à la valeur proposée sur le graphique en annexe page 8.

2. b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que $A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}$.

- Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et que x est positif sur $[0; +\infty[$, le terme xe^{-x} est positif sur $[0; +\infty[$. de ce fait pour tout réel x de $[0; +\infty[$ on a :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \geq \ln(x+1) \iff f(x) \geq g(x)$$

- L'expression $(f(x) - g(x))$ est donc positive (ou nulle) sur $[0; +\infty[$ et continue (donc intégrable), de ce fait l'aire A_λ du domaine D_λ s'exprime, en unités d'aire, par :

$$A_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) \, dx \quad \text{u.a.}$$

Or pour tout x de $[0; +\infty[$, on a vu que :

$$(f(x) - g(x)) = xe^{-x} = h(x)$$

Dans la question (A.3c) on a déterminé une primitive de h sur $[0; +\infty[$ que l'on a noté H définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = \underline{(-1-x)e^{-x}}$$



On a donc :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= H(\lambda) - H(0) \\ &= (-1 - \lambda)e^{-\lambda} - (-1 - 0)e^{-0} \\ &= (-1 - \lambda)e^{-\lambda} + 1 \\ &= -\frac{1 + \lambda}{e^\lambda} + 1 \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}$$

2. c. Calculer la limite de A_λ , lorsque tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

D'après la propriété 1 on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Donc avec le même argument de composition que lors de la question (A.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^\lambda}{\lambda} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^\lambda}{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0$$

De ce fait puisque

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{e^\lambda} - \frac{1}{e^\lambda}$$

On a par somme de limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1}$$

L'aire du domaine tend donc vers 1.

3. On considère l'algorithme suivant :

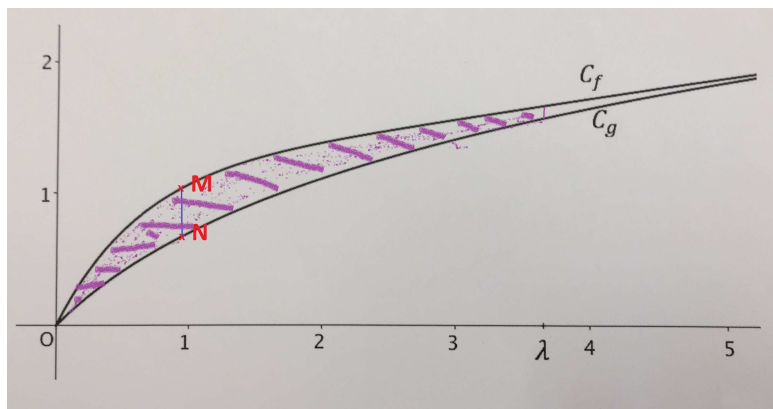
3. a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?

λ	0	1	2	3	4	5
A_λ	$0 < S = 0,8$	$0.26424 < 0,8$	$0.59399 < 0,8$	$0.80085 > 0,8$	0.90842	0.95957

La valeur affichée par cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$ est donc $\lambda = 3$.

3. b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

L'algorithme affiche le plus petit entier naturel λ pour lequel $A_\lambda \geq S$.



**Exercice 2.****3 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$. On note A le point de coordonnées $(1; a; a^2)$, où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a , le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

Le point A appartient au plan P si ses coordonnées vérifient l'équation de P . Pour tout réel a on a :

$$\begin{aligned} A(1; a; a^2) \in \mathcal{P} &\iff 2 - a^2 - 3 = 0 \\ &\iff -1 = a^2 \end{aligned}$$

or a est réel donc a^2 est positif pour toute valeur de a .

Quelle que soit la valeur du réel a , le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2.**2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.**

- Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est de coordonnées $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Donc la droite D (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{n}$ comme vecteur directeur.
La droite D passant par le point $A(1; a; a^2)$ et de vecteur directeur $\vec{n} (2; 0; -1)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\vec{n}$. On a alors :

$$D = \left\{ M(x; y; z); \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-a \\ z-a^2 \end{pmatrix} = t \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite D est donc :

$$D : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. b. Soit M un point appartenant à la droite D , associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente. Exprimer la distance AM en fonction du réel t .

dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a avec $\begin{cases} A(1; a; a^2) \\ M(2t+1; a; -t+a^2) \end{cases}$:

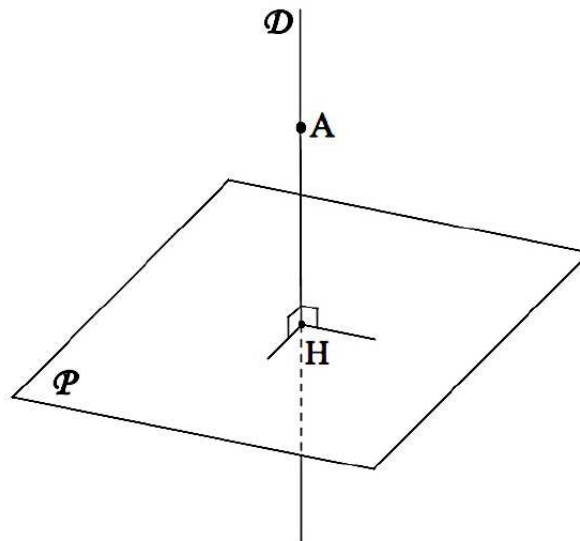
$$\begin{aligned} AM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 \\ &= (2t)^2 + (a - a)^2 + (-t + a^2 - a^2)^2 \\ &= 4t^2 + t^2 \\ AM^2 &= 5t^2 \end{aligned}$$

Donc puisque t est réel on a :

$$AM = \sqrt{5} \times |t|$$



3. On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite D orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A . Le point H est appelé le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.



Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $A(1; a; a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale? Justifier la réponse.

- Puisque la droite D est par définition orthogonale au plan $\mathcal{P}$, le point H , projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, est le point d'intersection de D et de $\mathcal{P}$. Ses coordonnées vérifient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ 2(2t + 1) - (-t + a^2) - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ 4t + 2 + t - a^2 - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = a \\ z = -t + a^2 \\ t_H = \frac{a^2 + 1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

- Donc dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a d'après la question précédente

$$AH = \sqrt{5} \times |t_H| = \sqrt{5} \times \left| \frac{a^2 + 1}{5} \right| = \frac{1 + a^2}{\sqrt{5}}$$

- Conclusion : la fonction carré est minimale en 0, donc la distance AH du point A de coordonnées $A(1; a; a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale pour $a = 0$ et vaut

$$AH_{\min} = \frac{1}{5}$$

❧ La suite de la correction est en cours de réalisation ❧